Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Nombre:____________________________________. **ROL:**_______________. **Paralelo:**______.

Matemática I (MAT021)

2^{do} Semestre de 2012. **Certamen 2**, Martes, 16 de Octubre de 2012.

Instrucciones

1. Revise que todos sus datos (**nombre, ROL y paralelo**) estén debidamente escritos en todas las hojas de este cuadernillo.
2. Todas las respuestas deben ser fundamentadas.
3. No se permiten **hojas adicionales**. Para cálculos y fundamentaciones use el espacio dejado para ello o la parte de atrás de las hojas, indicando a qué ejercicio corresponde el desarrollo.
4. No se permiten **calculadoras, celulares** u otro tipo de **elemento tecnológico**
5. Dispone de **90 minutos** para desarrollar el certamen.

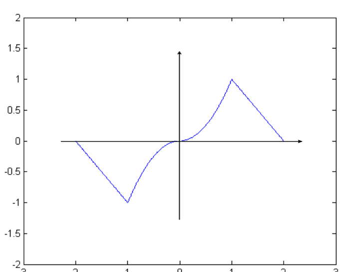
Ejercicios de desarrollo corto

1. **(10 puntos)** Considere la función impar $f : [-2, 2] \to [-1, 1]$ de la que conocemos:

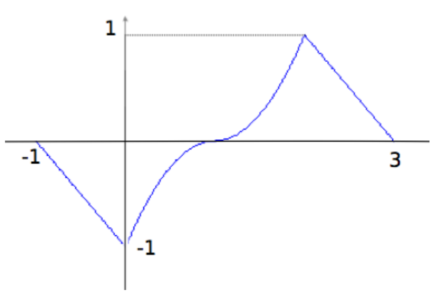
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Determinar dominio, recorrido y gráfica de la función g definida mediante: $g(x) = f(x - 1) + 1$.

Solución Sabiendo que la función f es impar obtenemos su gráfica:

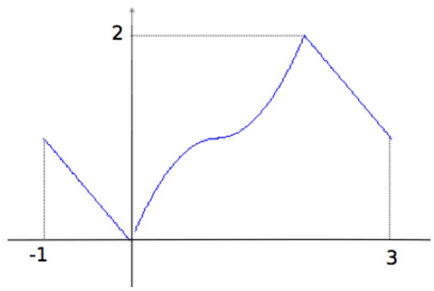


Haciendo un corrimiento horizontal obtenemos la gráfica de $f(x - 1)$



y finalmente, haciendo un corrimiento vertical obtenemos la gráfica de $g(x) = f(x - 1) + 1$

Nombre:____. **ROL:**_________________. **Paralelo:**_______.



De la gráfica conclúimos que:

- $\mathrm{Dom}(g) = [-1, 3]$.
- $\mathrm{Rec}(g) = [0, 2]$.

2. **(10 puntos)** Calcule
$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(2(x-1))}{x^3-1}$$

Solución:
$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(2(x-1))}{x^3-1} &= \frac{\operatorname{sen}(2(x-1))}{(x-1)(x^2+x+1)}\\ &= \frac{2\operatorname{sen}(2(x-1))}{2(x-1)(x^2+x+1)}\end{aligned}$$

Note que:
$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(2(x-1))}{2(x-1)} = \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1, \quad \text{donde} \quad u = 2(x-1)$$

y
$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}$$

Luego,
$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(2(x-1))}{x^3-1} = 2\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(2(x-1))}{2(x-1)} \cdot \lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}$$

3. **(10 puntos)** Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P = (7, -5)$ y es tangente a la recta $l : x - y - 4 = 0$ en el punto $Q = (3, -1)$.

Solución. Sea $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ la ecuación pedida.

Como P y Q pasan por la circunferencia, tenemos la igualdad
$$\begin{gathered}(7-h)^2 + (-5-k)^2 = (3-h)^2 + (-1-k)^2\\ \Leftrightarrow 49 - 14h + h^2 + 25 + 10k + k^2 = 9 - 6h + h^2 + 1 + 2k + k^2\\ \Leftrightarrow 8k = 8h - 64\\ \Leftrightarrow k = h - 8. \ (*)\end{gathered}$$

Ahora bien, como $l : y = x - 4$ es tangente a la circunferencia, entonces existe $l_1 : y = -x + b_1$ una recta perpendicular a l que pasa por Q y (h, k).

Aprovechando que l_1 pasa por Q, se llega a que $-1 = -3 + b$, de donde $b = 2$, y por lo tanto $l_1 : y = -x + 2$.

Como también l_1 pasa por (h, k), entonces $k = -h + 2$.

Usando esta última igualdad junto con $(*)$, se deduce que $(h, k) = (5, -3)$.

De esta manera, la ecuación de la circunferencia está dada por $(x-5)^2 + (y+3)^2 = r^2$. Reemplazando finalmente el punto P en esta ecuación, obtenemos que $r^2 = 8$.

Así, la ecuación buscada es $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 8$.

4. **(10 puntos)** La población de un país aumenta según el modelo exponencial $y(t) = y_0 e^{Kt}$, donde $y(t)$ es el número de habitantes en el año t, y_0 es la población inicial y K es constante.
Si en el año 1990 la población del país era 12 millones de habitantes y en el año 2000 era de 16 millones. ¿Qué población estima para el año 2012?

Solución

Considerando el año 1990 como el instante inicial y que $y(t)$ está dado en millones de personas, tenemos que

$$y(0) = y_0 = 12.$$

Además sabemos que en el año 2000 la población era de 16 millones lo que se traduce en la ecuación

$$\begin{aligned} y(10) &= 16 \\ 12e^{K10} &= 16 \\ e^K &= \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{10}} \end{aligned}$$

Lo que nos piden calcular es entonces

$$\begin{aligned} y(22) &= 12e^{K22} = 12(e^K)^{22} \\ y(22) &= 12\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{22}{10}} \\ y(22) &= 12\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{11}{5}} = \frac{64}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

La población en 2012 será de $12\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{22}{10}}$ (o $\frac{64}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$) millones de habitantes

5. **(10 puntos)** Determine todas las asíntotas de

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 6}.$$

Solución

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 6} = \frac{x^3}{(x+2)(x-3)}.$$

Se tiene que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \infty \therefore x = 3 \text{ es asíntota vertical,}$$

y

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \infty \therefore x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

Por otra parte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - x - 6)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2)} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x^2 - x - 6)}{x^2 - x - 6} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 6x}{x^2 - x - 6} = 1.$$

Luego, la recta $y = x + 1$ es asíntota oblicua.

No tiene asíntotas horizontales.

Ejercicios de desarrollo largo

1. **(25 puntos)** Calcule a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} & , \quad x < 0 \\ ax+b & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & , \quad 2 < x \end{cases}$$

sea continua.

Solución Continuidad en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}{1+x^2-1} = \lim_{x\to 0^-} (\sqrt{x^2+1}+1) = 2$$

Por otra parte $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (ax+b) = b$

Continuidad en $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (ax+b) = 2a+b$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)(x+\sqrt{x+2})} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x^2-x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{(4x+1-9)(x+\sqrt{x+2})} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})} = \frac{3(3+3)}{4(2+2)} = \frac{9}{8}
\end{aligned}$$

Para asegurar la continuidad se debe tener

$$\left.\begin{aligned} b &= 2 \\ 2a+b &= \frac{9}{8} \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= -\frac{7}{16} \\ b &= 2 \end{aligned}$$

2. **(25 puntos)** Considere la función $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos(3x + \pi)$.

   (a) Demuestre que f es una sinusoide. Indique amplitud, periodo y ángulo de fase.

   (b) Resuelva la ecuación $f(x) = -1$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución.

(a) Tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos(3x + \pi) \\
&= \operatorname{sen}(3x) - \sqrt{3}\cos(3x) \\
&= \sqrt{1+3}\left(\frac{1}{\sqrt{1+3}}\operatorname{sen}(3x) - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}}\cos(3x)\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(3x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(3x)\right) \\
&= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\cos(3x)\right) \\
&= 2\operatorname{sen}\left(3x + \frac{5\pi}{3}\right) \quad \left(\text{ó } \; 2\operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)\right)
\end{aligned}$$

Así, f es una sinusoide con amplitud 2,periodo $\frac{2\pi}{3}$y ángulo de fase $\frac{-5\pi}{9}$.

(b) Para resolver la ecuación $f(x) = -1$, usamos el item anterior para obtener

$$\begin{aligned}
f(x) = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\operatorname{sen}\left(3x + \frac{5\pi}{3}\right) = -1 \\
&\Leftrightarrow \quad 3x + \frac{5\pi}{3} = \begin{cases} \frac{7\pi}{6} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad 3x = \begin{cases} \frac{-\pi}{2} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} \frac{-\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi & k \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi & k \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Ahora bien, para el conjunto (1) se verifica que la única solución en el intervalo $[0, \pi]$ se encuentra con $k = 1$, y está dada por $x = \frac{-\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$.

Para el conjunto (2), las dos soluciones en el intervalo $[0, \pi]$ se encuentran con $k = 0$ y $k = 1$ y corresponden a $\frac{\pi}{18}$ y $\frac{13\pi}{18}$.

Así, el conjunto solución de la ecuación es $S = \left\{\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{18}\right\}$.