Matemática I (MAT021)

2^{do} Semestre de 2012. **Control 3**. Martes 20 de Noviembre de 2012.

Nombre:____. **ROL:**________________. **Paralelo:**______.

El control consta de **dos problemas**. Lea detenidamente cada pregunta y responda completa y ordenadamente en esta misma hoja, **no se admiten** hojas adicionales.

Tiempo: **45 minutos**.

- **Problema 1:**

  i. **(30 pts.)** La función $f:]0,\infty[\to]0,\infty[$, $f(x) = x\arctan(x)$ es biyectiva. Si $g:]0,\infty[\to]0,\infty[$ es su función inversa, determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de g en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

  ii. **(30 pts.)** Considere la función $f: [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^2+1} - \sqrt{5}$. ¿Cuántas raíces tiene en el intervalo $[0,2]$? Justifique adecuadamente.

  Solución

  i. La derivada de f es $f'(x) = \arctan(x) + \frac{x}{x^2+1}$.
  Por teorema de función inversa
  $$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}.$$
  La ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ es
  $$t: y - 1 = \frac{1}{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$
  y la ecuación de la recta normal es
  $$n: y - 1 = -\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

  ii. $f \in C^\infty(\mathbb{R} - \{-1\})$. En particular $f \in C^1([0,2])$, por lo que puedo aplicar Teoremas de Valor Intermedio y de Rolle (o de Lagrange).

  $f(0) = 1 + 1 - \sqrt{5} < 0$.
  $f(2) = \sqrt{9} + \sqrt{5} - \sqrt{5} = 3 > 0$.
  Por Teorema de Valor Medio, existe al menos un valor $x_0 \in]0,2[$ tal que $f(x_0) = 0$.
  Esta raíz es única. Si existiese otro valor $x_1 \in]0,2[$ tal que $f(x_1) = 0$, entonces podríamos aplicar el Teorema de Rolle (o su generalización el Teorema de Lagrange) para concluir que existe un valor c tal que
  $$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 0 \qquad c \in]x_0, x_1[\qquad \text{(o }]x_1, x_0[\text{, según el orden de las raíces)}$$[1]
  Pero
  $$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \text{ para todo } x \in]0,2[.$$

[1] Ambas opciones se consideran correctas.

- **Problema 2 (40 pts.):** En el desarrollo de $(\frac{x}{a} - x^2)^{15}$, el término que contiene a x^{27} tiene el coeficiente numérico $\frac{91}{25}$. Determine el valor de a.

  Solución

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{a} - x^2\right)^{15} &= \sum_{i=0}^{15} \binom{15}{i} \left(\frac{x}{a}\right)^i (-x^2)^{15-i} \\
&= \sum_{i=0}^{15} \binom{15}{i} \left(\frac{1}{a}\right)^i (-1)^{15-i} x^{30-i}
\end{aligned}$$

Luego $30 - i = 27 \Rightarrow i = 3$.

$$\begin{aligned}
\frac{91}{25} &= \binom{15}{3} \left(\frac{1}{a}\right)^3 (-1)^{15-12} \\
&= \frac{15!}{12!3!a^3} \\
&= \frac{13 \times 14 \times 15}{2 \times 3 \times a^3} \\
&= \frac{13 \times 7 \times 5}{a^3} \\
&= \frac{91 \times 5}{a^3} \\
&\Rightarrow a = 5
\end{aligned}$$

Obs.: Evidentemente $\left(\frac{x}{a} - x^2\right)^{15} = \sum_{i=0}^{15} \binom{15}{i} \left(\frac{x}{a}\right)^{n-i} (-x^2)^i$ también es correcto y entrega el mismo valor de a.