Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Funciones Continuas

1. Determine $A, B \in \mathbb{R}$ de modo que

$$f(x) = \begin{cases} -2\operatorname{sen} x & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ A\operatorname{sen} x + B & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \frac{\pi}{2} \leq x \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$.

2. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 1 - x & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Demuestre que f es continua en $x = \dfrac{1}{2}$ y discontinua en todos los demas puntos.

3. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Probar que f es continua en 0.

4. Sea $h(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad x \neq 0$. Demuestre que no importa como se intente definir h en 0, siempre sera discontinua en 0.

5. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{3x-1} & \text{si} \quad x < b \\ \dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x \geq b \end{cases}$$

Determine el (los) valor(es) de b en $\mathbb{R}$, tal que f sea continua en b.

6. Determine condiciones sobre a y b en $\mathbb{R}$ para que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a(x^3 - x)}{3(x-1)} & \text{si} \quad x < 1 \\ 2ax + b & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 4 \\ \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{si} \quad 4 < x \end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$

7. Sea $f(x) = \dfrac{x^{3/2} + \sqrt{x} - x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

¿Que tipo de discontinuidad hay en $x = 1$?

8. Sea

$$f(x) = \frac{1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi - x}$$

¿Se puede definir $f(\pi)$ de modo que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

9. Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{8 - x^3}{x^2 - 2x} & x < 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$$

Clasificar las discontinuidades de f.

10. Determinar A y B tal que

$$f(x) = \begin{cases} A\cos(3\pi x) - Bx & x \leq \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x - \frac{1}{3}}{3x - 1} & \dfrac{1}{3} < x \leq 6 \\ 3Ax^2 + 6Bx - 5 & x > 6 \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$

11. Clasifique las discontinuidades de la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)(x^2 - 1)}{x^2 - 2x}$$

12. Para cada función que sigue, el dominio es $\mathbb{R}$ salvo un número fínito de puntos. Examinar en cada uno de los puntos en que la función no esta definida y determinar si es posible definir la función en esos puntos, de modo que sea continua en él.

$$\text{(a)}\quad f(x) = \frac{x}{x-2} \qquad \text{(b)}\quad g(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$$

$$\text{(c)}\quad h(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{x - x^2} \qquad \text{d)}\quad f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$$

13. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua, I es un intervalo en $\mathbb{R}$. Probar que $f(I)$ es un intervalo.

14. Suponer que f y g son continuas en x_0 y que $f(x_0) < g(x_0)$ entonces existe un intervalo I, con centro en x_0 tal que $\forall x \in I$; $f(x) \leq g(x)$.

15. Sea $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $g(x+y) = g(x)g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Probar que si g es continua en $x = 0$, entonces g es continua en todo punto. Además si $g(a) = 0$, para algún $a \in \mathbb{R}$, entonces $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

16. Una función $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ se dice **aditiva** si $\forall x, y \in \mathbb{R}$, se cumple que $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

    (a) Probar que una función aditiva que es continua en $x = 0$, es continua en todo $\mathbb{R}$

    (b) Probar que una función aditiva monotona es continua en todo $\mathbb{R}$

17. Sean f y g continuas en un punto $a \in \mathbb{R}$. Sean $h(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$ y $k(x) = \inf\{f(x), g(x)\}$. Demostrar que h y k son continuas en a.

    (Sugerencia: $\sup\{b, c\} = \frac{1}{2}(b + c + |b - c|)$ e $\inf\{b, c\} = \frac{1}{2}(b + c - |b - c|)$).

18. Probar que no existe una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(y)$ tenga exactamente dos elementos, $\forall y \in \mathbb{R}$.

19. Probar que toda función racional (cuociente de dos funciones polinomiales) es continua en todo su dominio.

20. Sean f y g funciones continuas en $\mathbb{R}$. Probar que:

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in Q \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

21. Encontrar una función que sea continua en un número finito de puntos dados y en todos los demás sea discontinua.

22. Analice la continuidad de las siguientes funciones y grafiquelas

(a) $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$

(b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{|\operatorname{sen}(x)|}$

(c) $f(x) = (-1)^{[1/x]}$

(d) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^n} \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R}$

23. Estudie la continuidad de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 8x & , \ x \leq 0 \\ x^3 & , \ 0 < x \leq 1 \\ -2x+4 & , \ 1 < x \leq 3 \\ x^2 - 11 & , \ 3 < x \end{cases}$$

24. Sea

$$f(x) = \begin{cases} mx + 2(1-x) & , x \geq 2 \\ \\ ax^2 - b & , x < 2 \end{cases}$$

¿Que condiciones tienen que satisfacer los parámetros m, a, b para que la función sea continua?

25. Calcule a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} & , \quad x < 0 \\ \\ ax+b & , \ 0 \leq x \leq 2 \\ \\ \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & , \quad 2 < x \end{cases}$$

sea continua.

26. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ -x & , \ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Pruebe que f es continua solo en $x = 0$.

27. Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Si $f(1) = g(0)$ pruebe que la función $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(2x) & , \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \\ g(2x-1) & , \ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

es continua.

28. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface $|f(x)| \leq |x|$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que f es continua en 0.

29. Sea g una función continua en 0 con $g(0) = 0$ y $|f(x)| \leq |g(x)|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pruebe que f es continua en 0.

30. Dé un ejemplo de una función f discontinua en todo su dominio, pero que $|f|$ sea continua.

31. Demuestre que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $g(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$. Dé un ejemplo que muestre que la afirmación es falsa si reemplazamos $[a, b]$ por (a, b).

32. Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio de grado par, cuyo coeficiente líder es positivo. Pruebe que el polinomio tiene un mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $p(x_0) < 0$, muestre que p tiene por lo menos 2 raices reales.

33. Si f y g son funciones continuas con $f(3) = 5$ y $\lim\limits_{x \to 3}(2f(x) - g(x)) = 4$. Calcule $g(3)$.

34. Pruebe que existe $x \in [0, 1]$ tal que

$$x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2(x)} = 119$$

35. Pruebe que existe $x \in [0, \pi]$ tal que

$$\operatorname{sen}(x) = x - 1$$

36. Iniciando a las 4 am, un excursionista escala lentamente hacia la cima de una montaña llegando al mediodía. Al día siguiente, él regresa a lo largo de la misma ruta, iniciando a las 5 am, y llegando al pie de la montaña a las 11 am. Demuestre que en algún punto a lo largo de la ruta su reloj mostraba la misma hora en ambos días.