UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Coordinación de Matemática I (MAT021)

Guía de Ejercicios N°3 de Complemento

Segundo Semestre de 2012

Ejercicios

Parte 1

1. Dos rectas se cortan formando un ángulo de $135°$. Si se sabe que la recta final tiene una pendiente de -3, calcular la pendiente de la recta inicial.

2. Una recta L_1, pasa por los puntos $A(3, 2)$ y $B(-4, -6)$ y otra recta L_2 pasa por los puntos $C(-7, 1)$ y $D(x, -6)$. Hallar la **abscisa x**, sabiendo que la recta L_1 es perpendicular a la recta L_2.

3. En el triángulo cuyos vértices son $A(-2, 1),\ B(4, 7)$ y $C(6, -3)$. Determinar:

   a) Las ecuaciones de sus lados.

   b) La ecuación de la recta que pasa por el vértice A y es paralela al lado opuesto $\overline{BC}$.

4. Determine el valor de la constante k para que la recta $kx + (3 - k)y + 7 = 0$ sea perpendicular a la recta $x + 7y + 1 = 0$

5. Determine el valor de k para que la recta $2x + 3y + k = 0$ forme con los ejes coordenados un triángulo de área 27.

6. Hallar el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de las pendientes de las rectas que los unen con los puntos $A(0, 5)$ y $B(0, -1)$ es igual a 2.

7. Determinar el lugar geométrico de un punto que se mueve de modo que su distancia a la recta de ecuación $4x - 3y + 12 = 0$ es siempre igual a la mitad de su distancia al eje Y.

8. Calcular la distancia entre las rectas paralelas de ecuaciones :

$$x + 3y - 6 = 0\ ,\ \ x + 3y + 14 = 0.$$

Parte 2

1. Los vértices de un triángulo son $A(-1,3)$, $B(3,5)$, $C(7,-1)$. Si D es el punto medio del lado AB y E el punto medio del lado BC, demostrar que la longitud del segmento DE es la mitad de la longitud del lado AC.

2. Demostrar que la recta que pasa por los puntos $A(-2,5)$ y $B(4,1)$ es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $C(-1,1)$ y $D(3,7)$.

3. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son:
$$y = ax - \frac{bc}{2}\ ,\ y = bx - \frac{ca}{2}\ ,\ y = cx - \frac{ab}{2}.$$
Demostrar que área del triángulo es igual a :
$$\frac{1}{8}(a-b)(b-c)(c-a)$$

4. Dado un triángulo ABC y la bisectriz AD, se traza por el punto D la paralela a AB la cual corta a AC en E y por el punto E se traza la paralela a BC, la que intersecta a AB en F. Demuestre que $\text{dist}(A,E) = \text{dist}(B,F)$

Parte 3

1. Encontrar la ecuación de la circunferencia de acuerdo a los datos que se especifican a continuación:
   a) Con centro en el origen y radio 8.
   b) Con centro en el punto $A(-2,3)$ y radio 4.
   c) Con centro en nel punto $C(4,-1)$ y que pasa por el punto $B(-1,3)$.
   d) Con centro en $C(-4,3)$ y es tangente al eje de las ordenadas.

2. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(1,1)$, $(1,3)$ y $(9,2)$

3. Determine la ecuación canónica del círculo cuyo centro es el centro de la elipse $4x^2 + y^2 - 8x - 4y - 8 = 0$ y que pasa por el punto $P(0,5)$.

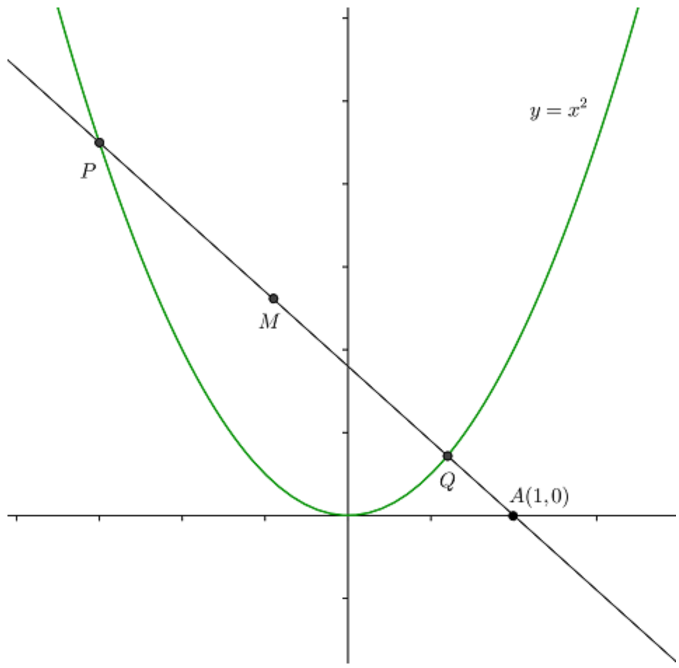
4. Determine el centro y el radio de un círculo (si es posible), que pase por los puntos $A(4,2),\ B(1,5)\ texty\ C(1+\sqrt{5},0)$.

5. Determine el área de un rectángulo R inscrito en la sección cónica $C:\ 2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 10 = 0$. Si el punto $P(2,y_0) \in C$ y es uno de los vértices de R.

6. Dadas las parábolas $P_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 - 2x - 8 - y = 0\}$ y $P_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y + x^2 - 2x - 8 = 0\}$. Determine (si es posible), la solución general de una circunferencia que pasa por los puntos de intersección de ambas parábolas, y por el centro de la cónica de ecuación general $4x^2 + \sqrt{2}y^2 - 24x - 10\sqrt{2}y + 36 + 21\sqrt{2} = 0$.

Parte 4

1. Considere la parábola de ecuación $y = x^2$ y el punto A de coordenadas $(1, 0)$. Si por este punto se traza una recta L de pendiente variable $m \in \mathbb{R}$, se pide:



   a) Determine el conjunto C de todos los m, tales que la recta L y la parábola se intersecten en al menos un punto.

   b) Si $m \in C$, sean P y Q los puntos donde la recta y la parábola se intersectan y M el punto medio del trazo PQ (ver figura). Determine las coordenadas (x_M, y_M) de M en términos de m.

   c) De las ecuaciones anteriores (eliminando el parámetro m), encuentre en qué curva se mueve el punto M (indique la ecuación e identifíquela). Además, considerando que $C \neq \mathbb{R}$, determine cual zona de esta curva es realmente recorrida por M.

2. Considere una barra AB de largo ℓ y sea M su punto medio. Si la barra se ubica en el sistema de coordenadas de modo que el punto A se mueva sobre el eje OY y el punto M se mueva sobre el eje OX. ¿Cuál es el Lugar Geométrico descrito por el extremo B?. Identifíquelo completamente.

3. Un triángulo ABC isósceles con $\overline{AB} = \overline{CB}$ varía de tal forma que su vértice A permanece fijo en el punto $A(-a, 0)$, su vértice B se mueve sobre el eje OY y el lado $\overline{CB}$ es horizontal. Determinar la ecuación del lugar geométrico que recorre el vértice C e identifíquelo, determinando, si corresponde, focos, directrices y excentricidad.

4. Un punto P cualquiera de la elipse de ecuación $x^2 + 4y^2 = a^2$ $(a > 0)$ se une con los puntos extremos del eje mayor de la elipse $A(-a, 0)$ y $B(a, 0)$. Las rectas $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ cortan a las rectas verticales $x = a$ y $x = -a$ en los puntos C y D respectivamente. Demuestre que las rectas $\overline{CO}$ y $\overline{DO}$ (O es el origen son perpendiculares.

Respuestas Parte 1

1. $m_1 = -\frac{1}{2}$.
2. $x_D = 1$.
3. a) **Lado** $AB: \; x - y + 3 = 0$.
   Lado $AC: \; x + 2y = 0$.
   Lado $BC: \; 5x + y - 27 = 0$.
   b) $3x + y + 9 = 0$.
4. $k = \frac{21}{6}$.
5. $k = \pm 18$.
6. $x - y + 2 = 0$.
7. $x - 2y + 8 = 0$.
8. $D = \frac{20}{\sqrt{10}}$.

Respuestas Parte 3

1. a) $x^2 + y^2 = 64$.
   b) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$.
   c) $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 41$.
   d) $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 16$.
2. $\left(x - \frac{79}{16}\right)^2 + (y-2)^2 = 16,5$.
3. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$.
4. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$.
5. $A = 8$.
6. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8 = 0$.

Respuestas Parte 4

1. a) $m \in C =]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$.
   b) $x_M = \frac{m}{2}$ **y** $y_M = m(\frac{m}{2} - 1$.
   c) **El punto** M **recorre los puntos de la parábola** $y = 2x^2 - 2x$ **que cumplen** $x \leq 0$ **o** $x \geq 2$.
2. **El lugar geométrico es una elipse de semieje mayor** l **y semieje menor** $\frac{l}{2}$**, centrado en el origen**.
3. **El lugar geométrico es una hiperbola de semiejes iguales de magnitud** a.
   Excentricidad: $e = \sqrt{2}$ **Directriz:** $x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ **Focos:** $(\pm a\sqrt{2}, 0)$