



MATEMATICA 021 - SEGUNDO SEMESTRE 2012

GUÍA N°1 PUBLICADA EL 30 DE AGOSTO DEL 2012

CONTENIDOS

- Cálculo
- Inecuaciones de Primer Grado
- Valor Absoluto
- Ecuaciones Cuadráticas
- Inecuaciones Cuadráticas
- Inecuaciones Racionales

- 1. Resolver:
 - a) $1 < 1 - 2x < 2$
 - b) $-1 < 2x - 3 \leq 4$
 - c) $-3 \leq 3 - x \leq 3$
- 2. Represente en el plano los conjuntos de puntos
 - a) $\{(x, y)/y \geq 2x - 4\}$
 - b) $\{(x, y)/y \leq 2 - x\}$
 - c) $\{(x, y)/2x - 4 \leq y \leq 2 - x\}$
- 3. Las instrucciones de una caja de película indican que esta debe almacenarse a una temperatura entre 5°C y 30°C . ¿A qué rango en la escala Fahrenheit corresponden estas temperaturas?
(Indicación: Busque en internet la relación entre las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit)
- 4. Demostrar que la media aritmética de dos números positivos no es menor que su media geométrica.
- 5. Si $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$ probar que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$
- 6. Resolver: $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 3x + 2 > 0 \end{cases}$
- 7. Resolver: $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3 > 0 \\ 2x - 1 < 0 \end{cases}$
- 8. Resolver
 - a) $\frac{2x + 1}{5} - \frac{2 - x}{3} > 1$
 - b) $\frac{5x - 1}{4} - \frac{3x - 13}{10} > \frac{5x + 1}{3}$
 - c) $\frac{3x - 1}{5} - \frac{x + 1}{2} > 1 - \frac{x}{7}$
- 9. Estudie en detalle la inecuación y entregue la solución apropiada en función del parámetro m :

$$m(x - 1) > x + 2$$
- 10. Si se conectan dos resistencias R_1 y R_2 en un circuito eléctrico, la resistencia neta R queda determinada por la ecuación:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Si $R_1 = 10[\Omega]$, ¿qué valores puede tomar R_2 para tener una resistencia neta menor que $5[\Omega]$?
- 11. Demostrar que la suma de dos números positivos no es menor que dos, si su producto es igual a 1

12. Si $a < b$ muestre que $a < \frac{a+b}{2} < b$
13. Si $0 < a < b$, probar que:
- a) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
b) $a^2 < b^2$
14. Demostrar que $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$, donde $a > 0$ y $b > 0$
15. Resolver $|x - 2| - |2 - x| = 0$
16. Resolver $|2x - 5| > 3$
17. Resolver $|2 - 3x| \leq 4$
18. Represente en el plano los conjuntos de puntos (x, y) que cumplen $y = |x - 1|$ e $y = 2$, geoméricamente resolver la inecuación $|x - 1| < 2$
19. Resolver:
- a) $|x + 2| = 2 + x$
b) $|2x - 3| = 1 - x$
c) $|x| - |x + 4| = 0$
d) $||x - 2| + 3| = 4$
20. Resolver $\left| \frac{2}{x} - 4 \right| < 3$
21. Representar en el plano $|x| + |y| = 1$
22. Resolver completando cuadrados las ecuaciones siguientes:
- a) $x^2 - 4x + 4 = 0$
b) $x^2 + x - 6 = 0$
c) $x^2 - 2x + 5 = 0$
23. Resolver llevando a la forma canónica cuadrática y resolver completando cuadrados:
- a) $1 + \frac{8}{x^2} = \frac{4}{x}$
b) $\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$
c) $\frac{2}{x-2} = \frac{4}{x-3} - \frac{1}{x+1}$
24. Determinar para qué valores de a en los reales, las raíces de la ecuación $x^2 - 3x + a^2 = 0$ son inversas multiplicativas la una de la otra.
25. Si las raíces de la ecuación $x^2 + 3x + k = 0$ las denotamos por x_1 y x_2 . ¿Qué valor hay que dar al parámetro k para que:
- a) $x_1 - x_2 = 0$
b) $3x_1 - x_2 = 4$
c) $5x_1 + 2x_2 = 0$
d) $x_1^2 + x_2^2 = 34$?

26. Resolver:

a) $|x^2 - 2x| = 1$

b) $x^2 + |2x| + 1 = 0$

27. ¿Cuál es el mínimo valor que adopta cada una de las expresiones reales siguientes:

a) $x^2 - 6x + 1$

b) $x^2 - 6x + 9$

28. ¿Cuál es el máximo valor que adopta cada una de las expresiones reales siguientes:

a) $3 - 4x - x^2$

b) $-5 + 6x - x^2$

29. Buscar para qué valores del parámetro $c \in \mathbb{R}$ la ecuación:

$$x^2 + 4x + c = 0$$

posee:

a) Dos raíces reales diferentes

b) Sólo una raíz real

c) Ninguna raíz real.

30. Para que valores del coeficiente m cada una de las ecuaciones siguientes tiene dos raíces reales iguales.

a) $4x^2 + mx + 9 = 0$

b) $mx^2 + 4x + 1 = 0$

c) $x^2 - 2(1 + 3m)x + 7(3 + 2m) = 0$

31. Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $(m + n)x^2 - mnx - m^3 = 0$, calcular el valor de la expresión

$$\frac{x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2}{x_1^3 + x_2^3}$$

32. Si $a, b \neq 0$, resolver $abx^2 + (a^2 - 2b^2)x = 2ab$

33. Resolver los sistemas cuadráticos

a)
$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 2x \end{array} \right\}$$

b)
$$\left. \begin{array}{l} (x - 1)^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{array} \right\}$$

c)
$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y - x = 1 \end{array} \right\}$$

d)
$$\left. \begin{array}{l} y - 2x^2 = 1 \\ y = -x^2 \end{array} \right\}$$

34. Determine los valores de a en los reales de tal manera que el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ xy = a \end{array} \right\}$$

Resuelva analítica y geoméricamente.

- a) Tenga 2 soluciones
- b) No tenga solución
- c) Tenga 4 soluciones

35. Mario compró cierto número de sacos de papa por \$240. Si hubiera comprado 3 sacos más, por el mismo dinero, cada saco le habría costado \$4 menos. ¿Cuántos sacos compró y a que precio?
36. El ingreso mensual obtenido por la venta de x relojes de pulsera será $x(40 - 0,2x)$ dólares. El costo al mayoreo de cada reloj es de US\$28,00. ¿Cuántos relojes deben venderse cada mes para obtener una ganancia (ingreso - costo) de al menos US\$100,00?
37. Un joven profesional tiene dos ofertas de trabajo como vendedor de computadoras. ¿Para el puesto A se le ofrece 20.000 dólares por año más un 5% de comisión. Para el puesto B se le ofrece solamente 15.000 dólares por año, pero la comisión de 10%. ¿Cuántas ventas debe realizar el vendedor para que el segundo puesto sea más lucrativo?
38. Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ de tal manera que las expresiones siguientes representen a un número real

- a) $\sqrt{4x - x^2}$
- b) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$
- c) $\frac{1}{x^2 - 1}$
- d) $\sqrt{x + 3}$
- e) $\frac{x}{\sqrt{2x - 5}}$
- f) $1 - \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

39. Resolver las ecuaciones:

- a) $3 + \sqrt{2x - 1} = 0$
- b) $x = 15 - 2\sqrt{x}$
- c) $\sqrt{2\sqrt{x + 1}} = \sqrt{3x - 5}$
- d) $\sqrt{x + 1} = \sqrt{x - 1}$
- e) $\frac{2x}{2x + 3} + \frac{6}{4x + 6} = 5$
- f) $\frac{5x^2 + 2}{x} = \frac{2}{x} + 5x$
- g) $2x - 3 = \sqrt{x + 6}$
- h) $\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2$
- i) $\frac{x + \frac{2}{x}}{3 + \frac{4}{x}} = 5x$
- j) $\sqrt{5 - x} + 1 = x - 2$
- k) $\sqrt{\sqrt{x + 5} + x} = 5$
- l) $\sqrt{x + \sqrt{x + 2}} = 2$
- m) $x + 2\sqrt{x - 7} = 10$
- n) $1 - \sqrt{x^2 + 7} = 6 - x^2$

40. Resolver las inecuaciones:

a) $x^2 - 3x - 18 \leq 0$

b) $2x^2 + x \geq 1$

c) $x^2 < 4$

d) $x^2 < x + 2$

e) $x^2 + 2x > 3$

41. Resolver las inecuaciones:

a) $x < \frac{1}{x}$

b) $\frac{x-1}{3-x} \leq 0$

c) $\frac{x-2}{x^2-x-2} \geq 0$

d) $\frac{4x+5}{x+2} \geq 3$

e) $\frac{x^2-1}{x} > 1$

f) $\frac{(x-2)^2}{x^2-1} < 0$

42. Resolver las inecuaciones siguientes

a) $x - 1 < \sqrt{3-x}$

b) $\sqrt{2x-3} - 2 \leq -1$

c) $\sqrt{x-3} - \sqrt{3-x} \geq 0$

43. Resolver las inecuaciones siguientes:

a) $\sqrt{x^2-1} \geq |x| - 3$

b) $\left| \frac{x+3}{x-5} \right| \leq 3$

c) $\sqrt{|x|-1} \geq a, a \neq 0$

44. Resolver:

$$\left| \frac{2}{x} \right| \geq \frac{x}{5}$$

45. Resolver:

a) $\frac{x^2-1}{|x+1|} > 1, \text{ con } x > 0$

b) $\frac{|x|}{|x^2-2x+1|} > 2$

46. Resolver las siguientes inecuaciones:

■ $-2x - 1 > -2$

■ $-5 < ax - b \leq 1, \text{ donde } a > 0 \text{ y } b \in \mathbb{R}$

47. ¿Para qué valores de a el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ 5x - ay = 2 \end{cases}$$

tiene soluciones negativas?

48. Resolver

a) $\sqrt{|x| - a^2} \leq (a + 1)$, con $a > 0$

b) $\left| \frac{-2}{x - 3} \right| \leq 1$

c) $\sqrt{x} \geq |x - 3|$

49. Resolver las siguientes desigualdades

a) $|-5x + 1| \geq 2$

b) $|x - 5| \leq |x|$

c) $\left| \frac{x + 3}{x - 2} \right| \geq \frac{x}{|x|}$

50. Resuelva $\sqrt{x + 1} > |x + 1|$

51. Resuelva $|3x - 2| = 2x - 1$

52. Resolver $\frac{40}{x^2 + x - 12} < 4$

53. Resuelva $x^4 - x \leq 0$

54. Resolver la inecuación cuadrática: $x^2 + x - 1 \leq 5$

55. Resolver $\frac{x - 2}{x + 3} < \frac{x + 1}{x}$

56. Resuelva $\frac{2}{5x} - \frac{x}{3} \leq -5x$

57. Resuelva: $|x - 1| < \frac{|x|}{x}$

58. Resuelva $x + 1 > \sqrt{x - 1}$

59. Resolver $\frac{x^2 - x}{x^2 + x} - 2 < x + 1$, con $x > 0$

60. Resolver cada una de las inecuaciones siguientes

a) $(x - 2)^2 > (x + 2)(x - 2) + 8$

b) $(x - 1)^2 < x(x - 4) + 8$

c) $\frac{3x - 5}{4} - \frac{x - 6}{12} < 1$

d) $\frac{x + 6}{3} - x + 6 \leq \frac{x}{15}$

61. ¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$, las expresiones siguientes representan a un número real?

a) $\sqrt{x + 5}$

b) $\frac{2}{\sqrt{x + 6}}$

c) $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x - 1}}$

62. Resolver las inecuaciones cuadráticas

- a) $x^2 \geq 16$
- b) $36 > (x - 1)^2$
- c) $x(x - 2) < 2(x + 6)$
- d) $4(x - 1) > x^2 + 9$
- e) $3 > x(2x + 1)$

63. ¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$, las expresiones siguientes representan a un número real?

- a) $\sqrt{x^2 + 1}$
- b) $\sqrt{x^2 + 4x + 4}$
- c) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - x}}$
- d) $\sqrt{x^2 - 6x - 7}$

64. Resolver cada una de las siguientes inecuaciones:

- a) $\frac{x}{x - 1} > 0$
- b) $\frac{x + 6}{3 - x} < 0$
- c) $\frac{x}{x - 5} - 2 \geq 0$
- d) $\frac{x^2}{x - 3} \geq x + 1$
- e) $\frac{x^2 + 1}{x} \geq 1$
- f) $x + \frac{25}{x} < 10$

65. ¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$, las expresiones siguientes representan a un número real?

- a) $\sqrt{\frac{x - 4}{x + 5}}$
- b) $\sqrt{\frac{2x - 1}{x - 6}}$

66. Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones

- a) $|2x - 1| > 3$
- b) $|3 - 2x| < |x + 4|$
- c) $|2x + 5| \geq |x + 4|$
- d) $||2 - x| - x| > 3$

67. Para cada uno de los conjuntos que se indican, hallar en el caso de existir, supremo, infimo, máximo, mínimo, conjunto de todas las cotas superiores, conjunto de todas las cotas inferiores.

- a) $A = (0, 1]$
- b) $B = \{1 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$
- c) $C = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x^2 - 1} < 1\}$
- d) $D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 4\}$

Respuestas:

1. a) $(-\frac{1}{2}, 0)$
b) $(1, \frac{7}{2}]$
c) $[0, 6]$
3. Entre $41^\circ F$ y $86^\circ F$
6. $(\frac{3}{2}, \infty)$
7. $(-6, \frac{1}{2})$
8. a) $x > 2$
b) $x < 1$
c) $x > 7$
9. $\begin{cases} x > \frac{m+2}{m-1} & \text{sí } m > 1 \\ x < \frac{m+2}{m-1} & \text{sí } m < 1 \end{cases}$
10. $0 < R_2 < 10$
15. \mathbb{R}
16. $x > 1 \vee x < 4$
17. $[-\frac{2}{3}, 2]$
19. a) $x \geq -2$
b) No hay solución
c) $x = -2$
d) $x \in \{1, 3\}$
20. $(\frac{2}{7}, 2)$
22. a) $x = 2$
b) $x = -3 \vee x = 2$
c) No hay solución en \mathbb{R}
50. $-1 < x < 0$
51. $x \in \{\frac{3}{5}, 1\}$
53. $0 \leq x \leq 1$
54. $-3 \leq x \leq 2$
60. a) $x < 0$
b) $x < \frac{7}{2}$
c) $x < \frac{21}{8}$
d) $x \geq \frac{450}{49}$
61. a) $x \geq -5$
b) $x > -6$
c) $x > 1$
62. a) $x \geq -5$

b) $x > -6$

c) $x > 1$

63. a) $x \in \mathbb{R}$

b) $x \in \mathbb{R}$

c) $[0, 1]^C$

d) $-1 \leq x \leq 7$

64. a) $x < 0 \vee x > 1$

b) $x < -6 \vee x > 3$

c) $5 < x \leq 10$

d) $x \leq -\frac{3}{2} \vee x > 3$

e) $x > 0$

f) $x < 0$

65. a) $(-\infty, -5) \cup [4, +\infty)$

b) $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (6, +\infty)$

66. a) El conjunto solución es: $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

b) $-\frac{1}{3} < x < 7$

c) $x \leq -3 \vee x \geq -1$

d) $x < -\frac{1}{2}$