5 Funciones

Ejercicios resueltos

1. Sea $f(x) = \dfrac{3-x}{x}$

   a) Calcule el dominio y el recorrido de f.
   b) Determine la paridad de f.
   c) Comprobar que f es $1-1$.
   d) Calcule la inversa de f, comprobando que $f \circ f^{-1} = \text{id}$.

   Respuesta: a) $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Sea $y = \frac{3-x}{x}$ luego $x = \frac{3}{y+1}$, $y \neq -1$ $\quad f(x) = \dfrac{3 - \frac{3}{y+1}}{\frac{3}{y+1}} = y$. Luego $\text{rec } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

   b) $f(-x) = \dfrac{3+x}{-x} \neq f(x)$. Por lo tanto f no es una función par.
   Como $f(-x) \neq -f(x)$, entonces f no es una función impar.
   En consecuencia f no tiene paridad.

   c) Si $f(u) = f(v)$ entonces $\dfrac{3-u}{u} = \dfrac{3-v}{v}$ de donde se concluye que $u = v$.
   En consecuencia f es $1-1$.

   d) Del trabajo realizado en a) se concluye que $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{x+1}$ es la inversa de f

   $$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(\frac{3}{x+1}\right) = \frac{3 - \frac{3}{x+1}}{\frac{3}{x+1}} = x, \quad \text{luego} \quad f \circ f^{-1} = \text{id}$$

2. Sean $f(x) = -3x + 5$, $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1; & -2 \leq x \leq 3 \\ -x^2; & 3 < x \leq 5 \end{cases}$

   Calcule $(g \circ f)(x)$ señalando el dominio.

Respuesta: dom $(g \circ f) = \{x \in \text{ dom } f / f(x) \in \text{ dom } g\}$.

$$-3x + 5 \in [-2, 3] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$$

$$-3x + 5 \in]3, 5] \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x < \frac{2}{3}$$

Luego:

$$\begin{aligned} g(f(x)) = g(-3x+5) &= (-3x+5)^2 - 1 \\ &= 9x^2 - 30x + 24, \quad x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right] \\ g(f(x)) = g(-3x+5) &= -(-3x+5)^2 \\ &= -9x^2 + 30x - 25, \quad x \in \left[0, \frac{2}{3}\right[\end{aligned}$$

3. Sean $f(x) = \sqrt{6-x}$, $g(x) = \sqrt{x^2-4}$.

   Sea $A \subseteq$ dom g. ¿ Cuál es el más grande conjunto A de modo que se pueda definir $f \circ g$?

   Respuesta: $\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \text{dom}\, g / g(x) \in \text{dom}\, f\}$
   $x^2 - 4 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq -2 \vee x \geq 2$.

   Luego $\text{dom}\, g =]-\infty, -2] \;\cup\; [2, +\infty[$ $\;6 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$, luego dom $f =]-\infty, 6]$. Por lo tanto: $\text{dom}(f \circ g) = \{x \leq -2 \vee x \geq 2 / \sqrt{x^2-4} \leq 6\}$

   Pero $\sqrt{x^2-4} \leq 6 \Leftrightarrow -\sqrt{40} \leq x \leq \sqrt{40}$.

   En consecuencia $A = \left[-\sqrt{40}, -2\right] \cup \left[2, \sqrt{40}\right]$.

4. Un terreno rectangular va a ser cerrado con una cerca y luego dividido por la mitad con otra cerca. Si la cerca que pasa por la mitad cuesta \$ 1.000 por metro lineal y la otra cuesta \$ 2.500 por metro lineal, expresar en función de uno de los lados el área del terreno si el costo total C es \$ 480.000.-

   Solución: Sea x el lado perpendicular a la división y.

   Luego $A = xy$.

$$C = 2x \cdot 2500 + 2y \cdot 2500 + 1000y = 480.000$$

Luego $y = \frac{1}{6}(480 - 5x)x$.

En consecuencia $A(x) = 80x - \frac{5}{6}x^2$.

5. Se disponde una hoja de cartón rectangular de 80 por 50 [cm], con la cual se desea construir una caja. Para lograrlo, se corta en cada esquina una cuadrado de lado x y se procede a doblar los lados.

   a) ¿ Para qué valores de x es posible construir la caja ?
   b) Determine el volumen de la caja en función de x.

   Solución:

   a) $0 < x < 25$ pues el ancho es 50.
   b) $V(x) = x(80 - 2x)(50 - 2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4.000x$.

6. Se va a inscribir un cilindro recto y circular en una esfera de radio R. Expresar el volumen del cilindro en función de su altura h.

   Calcule los posibles valores de h.

   Solución: $V = \pi r^2 h$.

   Pero $R^2 = r^2 + \frac{1}{4}h^2$ en consecuencia

$$V(h) = \pi h \left(R^2 - \frac{1}{4}h^2\right); \quad 0 < h < 2R$$

7. Para $a > 0$ fijo se define la función escalón unitario:

$$f_a(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < a \\ 1, & x \ge a \end{cases}$$

   Sea $F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 2 \\ 5, & x \ge 2 \end{cases}$

   Expresar F en términos de funciones f.

   Respuesta: Sean $g(x) = x^2$; $x \ge 0$.

   $h(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 2 \\ 5 - x^2, & x \ge 2 \end{cases}$ luego $h(x) = f_2(x) \cdot (5 - x^2)$

   En consecuencia $F(x) = x^2 + f_2(x) \cdot (5 - x^2)$.

8. Considere la función $g(x) = \begin{cases} x-1, & x < -1 \\ x^2+1, & -1 \leq x \leq \sqrt{15} \end{cases}$

a) Determine el dominio y el recorrido de g.

b) Obtenga la imagen de 0 y $-\sqrt{2}$; la preimagen de -1 y de 2 (si es que existen).

c) ¿ es g $1-1$? Justificar.

d) Evaluar $\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}$, $h > 0$

Respuesta:

a) dom $g =]-\infty, \sqrt{15}]$
Si $x < -1$ entonces $x - 1 < -2$.
Si $-1 \leq x \leq 0$ entonces $1 \leq x^2 + 1 \leq 2$
Si $0 < x \leq \sqrt{15} \Rightarrow 1 < x^2 + 1 \leq 16$.
Por lo tanto, el rec $g =]-\infty, -2[\cup [1, 16]$.

b) $g(0) = 1$, $g(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} - 1$.
La preimagen de -1 no existe, ya que $-1 \notin$ rec g.
Si $x^2 + 1 = 2 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1$.

c) g no es $1-1$ pues $g(1) = g(-1) = 2$.

d) Si $h > 0$ entonces $1 + h > 1$, luego

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \frac{(1+h)^2+1-2}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$