8 Límites y Continuidad

Ejercicios resueltos

1. Calcular si existen:

a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{1-\sqrt{1-(x-a)}}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{cotan} x - \left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3}{\cos x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1+x}-1}$ d) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ donde

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & , \quad x<2 \\ x^2+1 & , \quad x \geq 2 \end{cases} \qquad \text{para} \qquad a=2; \quad a=0; \quad a=4$$

Respuesta:

a) $$\lim_{x\to a} \frac{x-a}{1-\sqrt{1-(x-a)}} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)[1+\sqrt{1-(x-a)}]}{1-(1-(x-a))}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)[1+\sqrt{1-(x-a)}]}{x-a} = \lim_{x\to a} 1+\sqrt{1-(x-a)} = 2$$

b) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cotan} x - \left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3}{\cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

$$= 1 - \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}-x}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \cdot \left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2 = 1 - 1\cdot 0 = 1$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos\frac{5}{2}x \operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\cos\frac{5}{2}x \, \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x} \left(\sqrt{x+1}+1\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 = 2$$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5$, luego no existe el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 4} f(x) = 17$$

2. Determine el valor de k de modo que exista el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ donde

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x}}{x-1} & ; \quad 0\leq x<1\\ \\ x+k & ; \quad x\geq 1\end{cases}$$

Respuesta:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})(x-1)}\\ &= \lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{(1+\sqrt{x})(x-1)}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(x+k)=1+k$. Luego el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe ssi $-\dfrac{1}{2}=1+k$, luego $k=-3/2$.

3. La función $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$ no es continua en $x=0$ ¿ porqué? ¿Es posible extenderla continuamente en $x=0$? Justificar la respuesta.

Respuesta: Como $0\notin \operatorname{dom} f$ entonces f no es continua en $x=0$. Sea $1+x=u^3$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} &= \lim_{u\to 1}\frac{u-1}{u^3-1}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{(u-1)(u^2+u+1)}\\ &= \lim_{u\to 1}\frac{1}{u^2+u+1}=1/3\end{aligned}$$

Por lo tanto es posible extenderla continuamente en $x=0$; basta definirla en $x=0$, $f(0)=1/3$.

4. Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{2x+1}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Solución: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x+\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})}{x}}{\frac{2x+1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})}{x}}{2+\frac{1}{x}}$

$0\leq\left|\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x}\right|\leq\left|\dfrac{1}{x}\right|$. Como $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ entonces el $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x}=0$

y en consecuencia el límite original es $1/2$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-\frac{1}{x}\right)x}{\left(-\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$$

5. Clasificar las discontinuidades. Justificar la respuesta.

$$f(x)=\frac{1-x}{1-x^2},\qquad g(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|} & ;\ x<0\\ x & ;\ x\geq 0\end{cases}$$

Respuesta: f discontinua en $x=-1$ y en $x=1$

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{1+x}=1/2$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{1-x}{1-x^2}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{1+x}\qquad\text{que no existe}$$

En consecuencia f tiene en $x=1$ una discontinuidad reparable y en $x=-1$ una discontinuidad esencial.

$$\lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{-x}=-1$$

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1$$

Como $\lim_{x\to0}g(x)$ no existe entonces g tiene en $x=0$ una discontinuidad esencial.

6. Usando la definición de límite completar:

$$\lim_{x\to2}\left(x^2-9\right)=-5\Leftrightarrow$$

Respuesta: $\lim_{x\to2}(x^2-9)=-5\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ tal que:

Si $0<|x-2|<\delta\Rightarrow|(x^2-9)-(-5)|<\varepsilon$, es decir:
Si $0<|x-2|<\delta\Rightarrow|x^2-4|<\varepsilon$

7. Suponga que se cumple la proposición:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0) \text{ tal que } 0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |f(x)+3| < \varepsilon$$

¿ Qué puede concluir?

Respuesta: La proposición equivale a garantizar que $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = -3$.

8. Demuestre que $\lim\limits_{x\to -2}(8x+9) = -7$.

Dem: Como se pide probar este límite entonces debemos usar la definición de límite.

Sea $\varepsilon > 0$ entonces debemos encontrar un número $\delta > 0$ que depende de ε para el cual se cumpla:

Si $0 < |x+2| < \delta \Rightarrow |(8x+9)-(-7)| < \varepsilon$.

Consideremos $|(8x+9)-(-7)| = |8x+16| = 8|x+2|$.

Luego basta tomar $\delta = \dfrac{1}{8}\varepsilon$; en efecto:

Si $0 < |x+2| < \dfrac{1}{8}\varepsilon \Rightarrow |(8x+9)-(-7)| = 8|x+2| < 8\left(\dfrac{1}{8}\varepsilon\right) = \varepsilon$

9. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x-2}$ no existe.

Dem. Una forma tal vez simple y clara es haciendo uso del método de reducción al absurdo. Para tal efecto supongamos que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x-2} = L$, donde L es algún número real. Deberemos encontrar una contradicción. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, luego

$$(x-2)f(x) = x. \text{ Luego } \lim_{x\to 2}(x-2)f(x) = \lim_{x\to 2} x,$$

en consecuencia, como estamos suponiendo la existencia del límite propuesto, entonces:

$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\cdot\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$, luego $0 \cdot L = 2$, lo que constituye una contradicción.

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x-2}$ no existe.

10. Calcule $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

Solución: Lo que primero debemos aclarar es que la variable aquí es h y en consecuencia debemos pensar que para los efectos del cálculo x es como si fuera una constante.

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0}(2x+h) = 2x$$

M. Cañas C.
Marzo 2003