Matemática I (MAT021)

2^{do} Semestre de 2012. **Certamen 1**, Sábado 8 de Septiembre de 2012.

Nombre:____. **ROL:**________________. **Paralelo:**______.

Instrucciones

1. Revise que todos sus datos (**nombre, ROL y paralelo**) estén debidamente escritos en todas las hojas de este cuadernillo.
2. Todas las respuestas deben ser fundamentadas.
3. No se permiten **hojas adicionales**. Para cálculos y fundamentaciones use el espacio dejado para ello o la parte de atrás de las hojas, indicando a qué ejercicio corresponde el desarrollo.
4. No se permiten **calculadoras, celulares** u otro tipo de **elemento tecnológico**
5. Dispone de **90 minutos** para desarrollar el certamen.

Ejercicios de desarrollo corto

1. **(10 puntos)** Dos compañías de telefonía móvil se instalan para competir en el mercado. La primera compañía ofrece un plan con un cargo fijo de 7000 pesos chilenos y cobra 280 por minuto. La segunda compañía ofrece un plan mensual con cargo fijo de 5000 pesos chilenos y cobra 300 por minuto.

   (a) Si una persona habla 60 minutos mensuales, ¿Con qué compañía le conviene contratar un plan? Justifique.

   (b) ¿Cuántos minutos debe hablar mensualmente una persona para que le convenga contratar un plan con la primera compañía?

   Solución:
   Sean P_1 y P_2 los precios de los planes de la primera y segunda compañía, respectivamente. Si denotamos por x la cantidad de minutos hablados mensualmente, entonces

$$\begin{aligned} P_1 &= 7000 + 280x \\ P_2 &= 5000 + 300x \end{aligned}$$

a) Si una persona habla 60 minutos mensualmente, entonces los precios de los planes de cada compañía son, respectivamente:

$$P_1 = 7000 + 280 \cdot 60 = 23800$$
$$P_2 = 5000 + 300 \cdot 60 = 23000$$

Luego es más conveniente contratar a la segunda compañía.

b) Buscamos para qué valores de $x > 0$ se verifica $P_1 < P_2$. Entonces:

$$P_1 < P_2 \Leftrightarrow 7000 + 280x < 5000 + 300x \Leftrightarrow 100 < x$$

Luego debe hablar más de 100 minutos mensuales.

2. **(10 puntos)** Sean $A,\ B \subseteq U$, donde U es un universo de referencia. Compruebe que $((A \cup B) - A)^c = A \cup B^c$.
   Solución:

$$\begin{aligned} ((A \cup B) - A)^c &= ((A \cup B) \cap A^c)^c \\ &= ((A \cap A^c) \cup (B \cap A^c))^c \\ &= (\phi \cup (B \cap A^c))^c \\ &= B^c \cup A \end{aligned}$$

3. **(10 puntos)** Determine los valores de m para los cuales se verifica

$$(m-1)x^2 + 2(m-3)x + 2m > 3, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Solución:
$(m-1)x^2 + 2(m-3)x + 2m>3$ si y solo si $(m-1)x^2 + 2(m-3)x + 2m - 3 > 0$, donde la función cuadrática $f(x) = (m-1)x^2 + 2(m-3)x + 2m - 3$ es positiva para todo $x \in \mathbb{R}$ siempre que el coeficiente cuadrático $(m-1) > 0$ y su discriminante es menor que cero, es decir m debe satisfacer:

$$\Delta = 4(m-3)^2 - 4(m-1)(2m-3) < 0 \quad \text{y} \quad m > 1.$$

Esto es, $m > 1$ y $m^2 + m - 6 > 0$ o bien $(m+3)(m-2) > 0$ de donde se tiene que $m \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$ y como además m debe ser mayor que 1, se tiene finalmente que $m \in (2, \infty)$.

Nombre:____. **ROL:**____________________. **Paralelo:**_______.

4. **(10 puntos)** En el punto más alto de una pequeña elevación de terreno se encuentra una antena de 10 metros de altura. Desde un punto A situado en el terreno llano, se ve el pie de la antena (B) bajo un ángulo de $30^{\text{o}} = \pi/6$ y el extremo superior de la misma con un ángulo de $45^{\text{o}} = \pi/4$. Hallar la altura de la elevación de terreno.

Solución:
Llamamos h a la altura a calcular y x la distancia entre el observador y la proyección en el suelo de la antena. Entonces tenemos,

$$\tan(\pi/6) = \frac{h}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\tan(\pi/6) = \frac{h+10}{x} = 1$$

De la segunda ecuación obtenemos $x = h + 10$ y sustituyendo en la primera ecuación se tiene

$$\frac{h}{h+10} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$h(\sqrt{3}-1) = 10$$
$$h = \frac{10}{\sqrt{3}-1}$$

5. **(10 puntos)** Sea $a < 0$. Resuelva la siguiente inecuación: $a\,|x-a| < \left|ax - a^2\right| - 2a^2$

Solución:
$a\,|x-a| < \left|ax - a^2\right| - 2a^2$

$a\,|x-a| - \left|ax - a^2\right| < -2a^2$

$a\,|x-a| - |a\,(x-a)| < -2a^2$

$a\,|x-a| - |a|\,|x-a| < -2a^2$

$a\,|x-a| + a\,|x-a| < -2a^2$

$2a\,|x-a| < -2a^2$

$|x-a| > -a$

$x - a < a \qquad \vee \qquad x - a > -a$

$x < 2a \qquad \vee \qquad x > 0$

$S =]-\infty, 2a[\cup]0, +\infty[$

Nombre:____. **ROL:**_________________. **Paralelo:**______.

Nombre:____. **ROL:**_________________. **Paralelo:**______.
Nombre:____. **ROL:**_________________. **Paralelo:**______.

Ejercicios de desarrollo largo

1. **(25 puntos)** Considere

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x+2}{x} \leq 3 \wedge |x+2| \leq 3 \right\}$$

- Determine el conjunto de cotas superiores e inferiores de S.
- En caso de existir, ¿el supremo y el ínfimo pertenecen a S?

Solución:

Hallamos primero los puntos que satisfacen la primera inecuación:
La inecuación tiene sentido si $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x} &\leq 3 \\ \frac{x+2}{x} - 3 &\leq 0 \\ \frac{-2x+2}{x} &\leq 0 \\ \frac{2(x-1)}{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $S_1 = (-\infty, 0[\ \cup [1, \infty)$.
Hallamos el conjunto solución de la segunda inecuación:

$$\begin{aligned} &| x+2 | \leq 3 \\ &-3 \leq x+2 \leq 3 \\ &-5 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $S = [-5, 1]$
El conjunto $S = S_1 \cap S_2 = [-5, 0[\ \cup \{1\}$.
Por lo tanto el conjunto de cotas superiores es $[1, \infty)$ y el conjunto de cotas inferiores es $(-\infty, -5]$.
El supremo es 1, que pertenece al conjunto.
El ínfimo es -5 que pertenece al conjunto.

2. **(25 puntos)** Considere los conjuntos $A = \{-1, 0, 1\}$ y $B = \mathbb{R}$. Definamos la función proposicional

$$p(x, y) : x + xy \neq 0 \Rightarrow xy + y > \sqrt{2},$$

donde $x \in A$ e $y \in B$. ¿Cuál es el valor de verdad de la proposición

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)(\overline{p(x, y)})?$$

Solución:
Notemos primero que:

$$\begin{aligned} \overline{p(x,y)} &\iff \overline{x + xy \neq 0 \Rightarrow xy + y > \sqrt{2}} \\ &\iff \overline{x + xy = 0 \vee xy + y > \sqrt{2}} \\ &\iff x + xy \neq 0 \wedge xy + y \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

Ahora bien, si $x = -1$, tenemos la proposición

$$(\exists\, y \in B)(-1 - y \neq 0 \wedge -y + y \leq \sqrt{2}) \iff (\exists\, y \in B)(y \neq -1 \wedge 0 \leq \sqrt{2})$$

la cual es una proposición verdadera, considerando cualquier $y \neq -1$ (por ejemplo $y = 0$).
Por otro lado, si $x = 1$, tenemos la proposición

$$(\exists\, y \in B)(1 + y \neq 0 \wedge y + y \leq \sqrt{2}) \iff (\exists\, y \in B)(y \neq -1 \wedge y \leq \sqrt{2}/2),$$

la que también resulta ser verdadera al considerar (por ejemplo) $y = 0$.
Finalmente, si $x = 0$ obtenemos la proposición

$$(\exists\, y \in B)(0 \neq 0 \wedge y \leq \sqrt{2}),$$

la cual es claramente falsa. De esta manera, la proposición

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)(\overline{p(x, y)})$$

es falsa.

Observación: basta chequear el caso $x = 0$ para poder determinar que la proposición es falsa. Si sólo se considera este caso (y se hace bien), el desarrollo debe ser considerado correcto.