Nombre:____. **ROL:**__________________. **Paralelo:**_______.

Matemática I (MAT021)

2^{do} Semestre de 2012. Certamen 3, Martes, 27 de Noviembre de 2012.

Instrucciones

1. Revise que todos sus datos (**nombre, ROL y paralelo**) estén debidamente escritos en todas las hojas de este cuadernillo.
2. Todas las respuestas deben ser fundamentadas.
3. No se permiten **hojas adicionales**. Para cálculos y fundamentaciones use el espacio dejado para ello o la parte de atrás de las hojas, indicando a qué ejercicio corresponde el desarrollo.
4. No se permiten **calculadoras, celulares** u otro tipo de **elemento tecnológico**
5. Dispone de **90 minutos** para desarrollar el certamen.

Ejercicios de desarrollo corto

1. **(10 puntos.)** El polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 + (3a - b)x + a - b$ es tal que 0 es raíz y el resto que resulta de dividirlo por $(x - 1)$ es 4. Determine a y b.

   Solución: Evaluamos el polinomio en $x = 0$ y $x = 1$ para obtener:

$$p(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a - b = 0$$

$$p(1) = 4 \quad \Rightarrow \quad 1 + a + (3a - b) + a - b = 4$$

   Resolviendo el sistema anterior obtenemos: $a = b = 1$

Nombre:____. **ROL:**_________________. **Paralelo:**_______.

2. **(10 puntos.)** Encuentre la ecuación de la recta normal a la curva $x^2y - \ln(y^2) - 1 = 0$, en el punto $(1,1)$

Solución:
Derivando implícitamente, se obtiene

$$2xy + x^2\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y^2}2y\frac{dy}{dx} = 0,$$

simplificando y despejando $\dfrac{dy}{dx}$, se tiene que

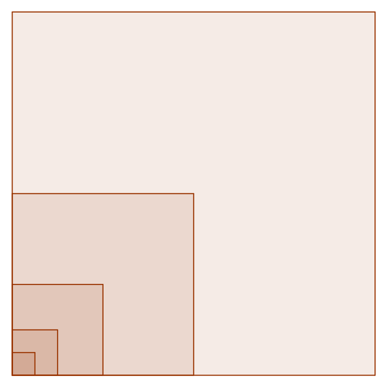
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 - 2\frac{1}{y}} = \frac{-2xy^2}{x^2y - 2},$$

luego evaluando en el punto $(1,1)$ se obtiene $\dfrac{dy}{dx}(1) = \dfrac{-2}{1-2} = 2$, por lo tanto la pendiente de la recta normal a la curva en el punto $(1,1)$ es $-\dfrac{1}{2}$, de modo que la ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

o bien $x + 2y - 3 = 0$.

3. **(10 puntos.)** Un cuadro de lado 1 ha sido dividido sucesivamente para formar cuadrados de lado *la mitad del anterior*, tal como lo muestra la figura adjunta. Encuentre la suma de las áreas de tales cuadrados en el paso $n-$ésimo de la división. (Obs: el cuadrado inicial de lado 1 es considerado el paso 0 y debe ser incluído en la suma).



Solución: Desde el enunciado se tiene que la longitud de los lados de los cuadrados son, de forma sucesiva,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}.$$

De esta manera, las áreas de tales cuadrados son

$$1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{8}\right)^2, \ldots, \left(\frac{1}{2^n}\right)^2.$$

o bien $a_n = \frac{1}{2^{2n}}$ en su forma general. Por lo tanto, la suma que debemos calcular es

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^{2i}}$$

la que corresponde a una suma geométrica de razón $1/4$. Así,

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^{2i}} = \frac{1 - 4^{(-(n+1))}}{1 - 4^{-1}} = \frac{4 - 4^{(-n)}}{3}$$

es la suma de las áreas de los cuadrados en el paso $n-$ésimo generados por la división.

Nombre:____. **ROL:**__________________. **Paralelo:**_______.

4. **(10 puntos.)** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Si $f(1) = -1$ y $f'(x) \geq 1$, $\forall x \in [1, 10]$, entonces pruebe que $f(10) \geq 8$.

Solución:

Como f es derivable en $\mathbb{R}$ podemos usar el Teorema del Valor Medio. Existe un $1 < c < 10$ tal que

$$\frac{f(10) - f(1)}{10 - 1} = f'(c) \geq 1 \Rightarrow \qquad f(10) \geq 8$$

5. **(10 puntos.)** Determine las dimensiones de una hoja de papel rectangular, de manera de que su área sea mínima, sabiendo que debe contener 150 cm^2 de texto escrito y que los márgenes laterales deben ser de 2 cm cada uno y los márgenes superior e inferior deben ser de 3 cm cada uno.

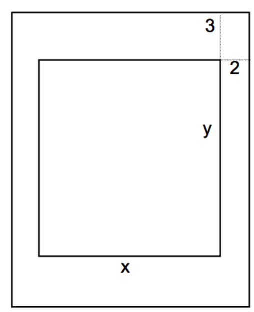
Solución: Llamamos x al ancho del rectángulo del texto escrito e y a su altura. Entonces, el área a minimizar es

$$(x+4)(y+6)$$

Como se debe cumplir $x.y = 150$, el área se puede expresar como función de x:

$$f(x) = (x+4)\left(\frac{150}{x} + 6\right) = \frac{6}{x}(x+4)(25+x),$$

considerando solo valores positivos de x (no puede ser negativa porque es un largo y no está definida en 0).



La función f es una función racional, por lo que es continua y derivable en su dominio. Derivando obtenemos

$$f'(x) = \frac{6}{x^2}[(25 + x + x + 4)x - (x+4)(25+x)] = \frac{6}{x^2}(x^2 - 100)$$

El único punto crítico en el dominio es $x = 10$. Como $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, el único punto crítico es mínimo global. Si $x = 10$ entonces $y = 15$ y las dimensiones de la hoja son de 14 cm de ancho por 21 cm de alto.

Obs: También se puede clasificar el punto crítico estudiando el signo de la derivada primera.

Nombre:____________________________________. **ROL:**________________. **Paralelo:**_______.

Ejercicios de desarrollo largo

I. **(25 puntos.)** Dado el número complejo $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}$

a) Determine las raíces quintas de z.

b) ¿Cuántas raíces se encuentran en el semiplano superior?

c) Si α y β son las raíces ubicadas en el primer cuadrante, encuentre $\alpha^{20} + \beta^{20}$.

Solución:

(a) La forma polar de z es $z = 1e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Sea $w = re^{i\theta}$ tal que $w^5 = z$, entonces

$$r^5 e^{i5\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

de donde $r = 1$ y $\theta = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{2k\pi}{5}$ con $k = 0, \ldots, 4$

(b) Se tienen las soluciones:

i. $w_0 = e^{i\frac{\pi}{20}}$

ii. $w_1 = e^{i\frac{9\pi}{20}}$

iii. $w_2 = e^{i\frac{17\pi}{20}}$

iv. $w_3 = e^{i\frac{25\pi}{20}}$

v. $w_4 = e^{i\frac{33\pi}{20}}$

Dado que $\frac{\pi}{20}, \frac{9\pi}{20}, \frac{17\pi}{20} \in]0, \pi[$ y $\frac{25\pi}{20}, \frac{33\pi}{20} \notin]0, \pi[$, sabemos que hay tres raíces en el semiplano superior.

(c) Las raíces en el primer cuadrante son w_0 y w_1. Se cumple:

$$w_0^{20} + w_1^{20} = \text{cis}(\pi) + \text{cis}(9\pi) = -2$$

Nombre:____. **ROL:**__________________. **Paralelo:**_______.

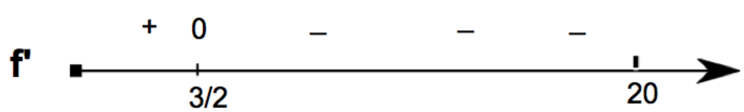
II. **(25 puntos.)** Considere la función $f : [0, 20] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (2x - 1)e^{-x}.$$

Determine ceros de la función, puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de concavidad y convexidad, extremos locales y globales (si los hubiese), puntos de inflexión (si los hubiese). Finalmente, dibuje su gráfica.

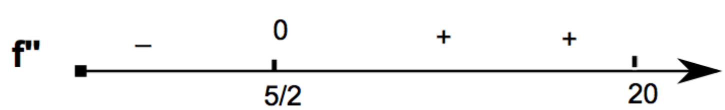
Solución:

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
- $f'(x) = (3 - 2x)e^{-x}$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. El único punto crítico es $x = \frac{3}{2}$.
- El signo de la derivada primera es



de allí que la función f crece en el intervalo $[0, \frac{3}{2}]$ y decrece en $[\frac{3}{2}, \infty[$. La función tiene un máximo relativo y global en $x = \frac{3}{2}$ y su valor máximo es $f(\frac{3}{2}) = 2e^{-\frac{3}{2}}$.

- $f''(x) = (2x - 5)e^{-x}$. El signo de la derivada segunda es



de allí que la función f es cóncava en el intervalo $[0, \frac{5}{2}]$, convexa el intervalo $[\frac{5}{2}, \infty]$ y tiene un punto de inflexión en $x = \frac{5}{2}$.

- La función es continua en un intervalo cerrado y acotado. Por el Teorema de Weierstrass, tiene máximo y mínimo absolutos. El máximo absoluto ya fue determinado, sabemos que se alcanza en el único punto crítico de la función. El mínimo debe alcanzarse en uno de los dos extremos del intervalor $[0, 20]$. Tenemos que $f(0) = -1$ y $f(20) = 39^{-20} > 0$, por lo que el mínimo absoluto es -1 y se alcanza en $x = 0$.

Con toda esta información es posible trazar una gráfica aproximada de la función f: