1 Axiomas de Orden

En el conjunto $\mathbb{R}$ se postula la existencia de un conjunto que se denotará por $\mathbb{R}^+$ y al que llamaremos conjunto de los "números reales positivos". Este verifica los axiomas conocidos como **axiomas de orden**:

Axioma
$x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+$
$x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}^+$
$\forall\, x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x \in \mathbb{R}^+ \veebar -x \in \mathbb{R}^+ \veebar x = 0$

Notar que si se define el conjunto de los números reales negativoa $\mathbb{R}^- = \{-x \,|x \in \mathbb{R}^+\}$ se tendrá que:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$

Proposición 1.1.

- $1 \in \mathbb{R}^+$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Para $x, y \in \mathbb{R}$ podemos decir que:

Nomenclatura	**Condición**	**Notación**
x es igual a y	$x = y$	$x = y$
x es menor que y	$y - x \in \mathbb{R}^+$	$x < y$
x es menor o igual que y	$x = y \vee y - x \in \mathbb{R}^+$	$x \leq y$
x es mayor que y	$x - y \in \mathbb{R}^+$	$x > y$
x es mayor o igual que y	$x = y \vee x - y \in \mathbb{R}^+$	$x \geq y$

Observar que la manera de definir "mayor o igual que" constituye una **relación de orden**, es decir, satisface las siguientes propiedades:

Propiedad	**Condición**
Reflexiva	$x \geq x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
Antisimétrica	$x \geq y \wedge y \geq x \Rightarrow x = y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
Transitiva	$x \geq y \wedge y \geq z \Rightarrow x \geq z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

Proposición 1.2. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que:*

- $a \leq b \ \wedge \ c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c \leq b + c$.
- $a \leq b \ \wedge \ c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ac \leq bc$.
- $a \leq b \ \wedge \ -c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ac \geq bc$.
- $a \leq b \ \wedge \ c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$.
- $0 \leq a \leq b \ \wedge \ 0 \leq c \leq d \Rightarrow 0 \leq ac \leq bd$.

Proposición 1.3. *Muestre que si $0 \leq a \leq b$ entonces:*

1. $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$
2. $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ *(aún no se ha garantizado la existencia de raíces cuadradas de números reales)*