

Matemática I (MAT021)2^{do} Semestre de 2012. **Control 1.** Martes 4 de Septiembre de 2012.**Nombre:**_____. **ROL:**_____. **Paralelo:**_____.

El control consta de **dos problemas**. Lea detenidamente cada pregunta y responda completa y ordenadamente en esta misma hoja, **no se admiten** hojas adicionales.

Tiempo: **45 minutos**.

- **Problema 1 (50 pts.):** Determine el conjunto de números reales tales que:

$$||x - 5| - |x + 3|| < 4$$

Solución:

$$\begin{aligned} & ||x - 5| - |x + 3|| < 4 \\ \iff & -4 < |x - 5| - |x + 3| < 4 \end{aligned}$$

Distinguimos tres casos: $x \in]-\infty, -3[$, $x \in [-3, 5]$ y $x \in]5, +\infty[$.¹

1. Si $x < -3$

$-4 < |x - 5| - |x + 3| < 4$ es equivalente a :

$$-4 < 5 - x + x + 3 < 4 \iff -4 < 8 < 4$$

Lo que nos dice que: El conjunto de los $x \in \mathbb{R}$, tales que $x < -3$ no cumple la ecuación.

2. Si $-3 \leq x \leq 5$

$-4 < |x - 5| - |x + 3| < 4$ es equivalente a :

$$\begin{aligned} & -4 < 5 - x - x - 3 < 4 \\ \iff & -4 < 2 - 2x < 4 \\ \iff & -6 < -2x < 2 \\ \iff & -1 < x < 3 \end{aligned}$$

Esta solución intersectada con la condición inicial $-3 < x < 5$, nos dice que el conjunto $(-1, 3)$ es solución del problema.

3. Si $x > 5$

$-4 < |x - 5| - |x + 3| < 4$ es equivalente a :

$$-4 < -5 + x - x - 3 < 4 \iff -4 < -8 < 4$$

Lo que nos dice que: El conjunto de los $x \in \mathbb{R}$, tales que $x > 5$ no cumple la ecuación.

La solución al problema es $(-1, 3)$.

¹Observar que los puntos $x = -3$ y $x = 5$ podrían pertenecer a cualquiera de los dos intervalos de los cuales son extremos. Ambas opciones están correctas.

- **Problema 2 (50 pts.):** Un grupo de 100 alumnos siguió tres asignaturas, Álgebra, Biología y Cálculo. Se sabe que 5 alumnos aprobaron las tres, 25 aprobaron Álgebra y Cálculo, 45 aprobaron Biología y/ o Cálculo, 80 no aprobaron Biología, 35 aprobaron Cálculo. ¿Cuántos alumnos aprobaron Biología y Cálculo pero no Álgebra.

Solución:

Considere los siguientes conjuntos:

A: Los alumnos que aprobaron Álgebra.

B: Los alumnos que aprobaron Biología.

C: Los alumnos que aprobaron Cálculo.

Entonces, la información que se tiene es:

$$\begin{aligned}\text{Card}(A \cap B \cap C) &= 5 \\ \text{Card}(A \cap C) &= 25 \\ \text{Card}(B \cup C) &= 45 \\ \text{Card}(B^c) &= 80 \Rightarrow \text{Card}(B) = 20 \\ \text{Card}(C) &= 35\end{aligned}$$

A continuación presentamos formas alternativas de terminar el ejercicio:

1. Por Cardinalidad

$$\begin{aligned}\text{Card}(B \cap C \cap A^c) &= \text{Card}((B \cap C) - A) \\ &= \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}(A \cap B \cap C) \\ &= \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}(A \cap B \cap C) \\ &= \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}(A \cap B \cap C) \\ &= \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(B \cup C) - \text{Card}(A \cap B \cap C) \\ &= 20 + 35 - 45 - 5 = 5\end{aligned}$$

Por lo tanto 5 alumnos aprobaron Biología y Cálculo, pero no Álgebra.

2. Por propiedades de conjuntos

$$\begin{aligned}\text{Card}(B) + \text{Card}(C) &= \text{Card}(B \cup C) + \text{Card}(B \cap C) \\ &= \text{Card}(B \cup C) + \text{Card}(B \cap C \cap A) + \text{Card}(B \cap C \cap A^c) \\ \Rightarrow \text{Card}(B \cap C \cap A^c) &= \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(B \cup C) - \text{Card}(B \cap C \cap A) \quad (1) \\ &= 20 + 35 - 45 - 5 = 5\end{aligned}$$

3. Utilizando diagramas de Venn, con lo que deberían llegar a una ecuación como la (1) o similar.