Matemática I (MAT021)

2^{do} Semestre de 2012. **Control 2**. Martes 2 de Octubre de 2012.

Nombre:____. **ROL:**__________________. **Paralelo:**_______.

El control consta de **dos problemas**. Lea detenidamente cada pregunta y responda completa y ordenadamente en esta misma hoja, **no se admiten** hojas adicionales.

Tiempo: **45 minutos**.

- **Problema 1 (50 pts.):** Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(2x).\cos(x) = 6\operatorname{sen}^3(x).$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2x).\cos(x) &= 6\operatorname{sen}^3(x)\\
2\operatorname{sen}(x).\cos^2(x) &= 6\operatorname{sen}^3(x)\\
2\operatorname{sen}(x)(\cos^2(x) - 3\operatorname{sen}^2(x)) &= 0.
\end{aligned}$$

Cuando cada uno de los factores se hace cero tenemos solución de la ecuación.

1. $\operatorname{sen}(x) = 0 \iff x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.
2.

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) - 3\operatorname{sen}^2(x) &= 0\\
\tan^2(x) &= \frac{1}{3}\\
\tan(x) &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\\
\iff & \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

El conjunto solución de la ecuación es $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

2' (una forma alternativa de resolver $\cos^2(x) - 3\operatorname{sen}^2(x) = 0$)

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) - 3\operatorname{sen}^2(x) &= 0\\
1 - 4\operatorname{sen}^2(x) &= 0\\
\operatorname{sen}(x) &= \pm\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Dividimos el estudio en dos casos:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \iff x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z}\\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\operatorname{sen}(x) = -\frac{1}{2} \iff x = \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z}\\ -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

El conjunto solución de la ecuación es $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm\frac{\pi}{6} + 2k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm\frac{5\pi}{6} + 2k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Observación: Las soluciones obtenidas son idénticas, aunque estén expresadas de dos formas distintas.

- **Problema 2 (50 pts.):** Considere las siguientes funciones:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -3x + 5,$$

$$g : [-2, 4] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 1 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

1. Encuentre $(g \circ f)$, señalando su dominio.
2. Indique si $(g \circ f)$ es inyectiva. Justifique.

Solución

1. Para encontrar la expresión de $(g \circ f)(x)$ necesitamos resolver las inecuaciones siguientes:

$$-2 \leq f(x) \leq 1 \wedge 1 < f(x) \leq 4$$

$$\begin{array}{rcl} -2 \leq & -3x+5 & \leq 1 \\ -7 \leq & -3x & \leq -4 \\ 7 \geq & 3x & \geq 4 \\ 7/3 \geq & x & \geq 4/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 < & -3x+5 & \leq 4 \\ -4 < & -3x & \leq -1 \\ 4 > & 3x & \geq 1 \\ 4/3 > & x & \geq 1/3 \end{array}$$

Por lo tanto tenemos que

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (-3x+5)^2 - 1 & 4/3 \leq x \leq 7/3 \\ -(-3x+5)^2 + 1 & 1/3 \leq x < 4/3 \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 9x^2 - 30x + 24 & 4/3 \leq x \leq 7/3 \\ -9x^2 + 30x - 24 & 1/3 \leq x < 4/3 \end{cases}$$

El dominio de $(g \circ f)$ es $[1/3, 7/3]$.

2. Hay varias formas de resolver bien esta parte del problema. Explicitamos algunas de ellas:
1) Una manera es observar que la función $g(x)$ no es inyectiva, pues toma tres veces todos los valores en el intervalo $]-1, 0[$ (para $x \in]-1, 0[$, $x \in]0, 1[$ y $x \in]1, 2[$).Por otro lado observamos que $f(x)$ toma todos los valores en $]-1, 2[$ cuando $x \in dom(f \circ g))$ pues

$$\begin{array}{rrcl} & -1 < & f(x) & 2 \\ \iff & -1 < & -3x+5 & < 2 \\ \iff & -6 < & -3x & -3 \\ \iff & 2 > & x & > 1 \\ & \iff & x \in]1, 2[& \end{array}$$

Y se tiene que $]1, 2[\subseteq dom(f \circ g)$.

2) Otra forma es trabajar directamente con la expresión de $(f \circ g)$,

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 9x^2 - 30x + 24 & 4/3 \leq x \leq 7/3 \\ -9x^2 + 30x - 24 & 1/3 \leq x < 4/3 \end{cases}$$

Y observar por ejemplo que $(g \circ f)(x)$ toma el valor 0 para dos valores de x.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad & 9x^2 - 30x + 24 = 0 \\ & 3x^2 - 10x + 8 = 0 \\ & x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 3 \times 8}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{3} = \frac{5 \pm 1}{3} \\ & x = 2 \vee x = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Y tanto $x = \frac{4}{3}$ como $x = 2$ pertenecen al dominio de $g \circ f$.
3) Una tercera opción es plantear $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ y demostrar que hay valores de $x_1 \neq x_2$ que cumplen la igualdad. Por ejemplo, si $x_1, x_2 \in [4/3, 7/3]$ con $x_1 \neq x_2$, se tiene:

$$\begin{aligned} & f(x_1) = f(x_2) \\ \Longleftrightarrow \quad & 9(x_1^2 - x_2^2) - 30(x_1 - x_2) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 9[(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - \tfrac{10}{3}(x_1 - x_2)] = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 9(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - \tfrac{10}{3}) = 0\end{aligned}$$

Cualquier para de valores para x_1 y x_2 tales que $x_1 \in [1, 2]$ y $x_2 = \frac{10}{3} - x_1$ verifica que $x_1, x_2 \in [4/3, 7/3]$ y $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Y se tiene $x_1 \neq x_2$ (salvo en el caso $x_1 = 5/3$). Por lo tanto $g \circ f$ no es inyectiva.