# PAUTA CERTAMEN N°3 MAT021 - Forma A     Primer Semestre 2012

| Apellido Paterno | Apellido Materno | Nombre | Paralelo |
|---|---|---|---|
| | | | |

**P R E G U N T A S**

1. La razón de una progresión geométrica es 2, el número de términos 11 y la suma de todos ellos 2047. Hallar el quinto término de la progresión.

   (A) 16
   (B) 32
   (C) 64
   (D) 128
   (E) Ninguna de las anteriores

   **Desarrollo:**
   La suma de los $n$ primeros términos de un P.G. de primer término $a$ y razón $r$, viene dada por:

   $$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

   luego, tenemos:

   $$2047 = \frac{a(2^{11} - 1)}{2 - 1} \Rightarrow 2047 = a(2048 - 1) \Rightarrow a = 1$$

   por lo tanto, el quinto término de la progresión geométrica será:$ar^4 = 1 \cdot 2^4 = 16$
   ALTERNATIVA CORRECTA: **Letra A**

2. El valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{-\sqrt{x}}}{\operatorname{sen}(x)}$ es

   (A) 0
   (B) 1
   (C) -1
   (D) $e$
   (E) No existe.

   **Desarrollo:**
   El límite es de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ y las funciones cumplen con las hipótesis de **L´Hôpital**, luego:

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{-\sqrt{x}}}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\sqrt{x}} + xe^{-\sqrt{x}} \cdot \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}}{\cos(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\sqrt{x}}(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2})}{\cos(x)} = 1$$

   ALTERNATIVA CORRECTA: **Letra B**

3. Exprese el número complejo $\dfrac{(1+i)^3}{1-i^3}$ en la forma $a+ib$.

   (A) $1+i$.
   (B) $2+i$.
   (C) $2i$.
   (D) $1+2i$.
   (E) $1-2i$.

   **Desarrollo:**
   Si usamos $z = x + yi$, entonces:

$$\frac{(1+i)^3}{1-i^3} = \frac{1+3i+3i^2+i^3}{1-i^3} = \frac{1+3i-3-i}{1+i} = \frac{-2+2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{4i}{2} = 2i$$

   ALTERNATIVA CORRECTA: **Letra C**

4. La ecuación de la recta tangente a la curva (***Folium de Descartes***) de ecuación:

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

   en el punto $(2,4)$,es:

   (A) $y = -\dfrac{5}{4}x + \dfrac{13}{2}$
   (B) $y = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{12}{5}$
   (C) $y = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{13}{2}$
   (D) $y = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{12}{5}$
   (E) Ninguna de las anteriores

   **Desarrollo:**
   La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(2,4)$, corresponde a $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto especificado, para determinar ello, derivamos implícitamente la ecuación: $x^3 + y^3 - 9xy = 0$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 9(y + x\frac{dy}{dx}) = 0$$

   evaluando en el punto $(2,4)$, tenemos: $\dfrac{dy}{dx}(2) = \dfrac{4}{5}$, por lo que la ecuación de la recta tangente será:

$$y - 4 = \frac{4}{5}(x-2) \Leftrightarrow y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$$

   ALTERNATIVA CORRECTA: **Letra B**

5. Encontrar el coeficiente del término $x^2$ en $(x^2 - \frac{i}{x})^{10}$, donde $i$ es la unidad imaginaria.

   (A) $-210$
   (B) $210$
   (C) $252i$
   (D) $-252i$
   (E) Ninguna de las anteriores

   **Desarrollo:**

$$(x^2 - \frac{i}{x})^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (x^2)^{10-k}(-i)^k x^{-k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{20-3k}(-i)^k$$

   luego, el término $x^2$ ocurre para $k = 6$, por lo que su coeficiente será: $\binom{10}{6}(-i)^6 = -210$

   ALTERNATIVA CORRECTA: **Letra A**

6. La suma de las raíces cúbicas de 8 en $\mathbb{C}$ es:

   (A) 2
   (B) 1
   (C) 0
   (D) $-2$
   (E) Ninguna de las anteriores

   **Desarrollo:**
   Escribiendo el 8 en forma polar, tenemos: $w = 8 \cdot \mathrm{cis}(0)$, las tres raíces cúbicas vienen dadas por:

$$w_k = \sqrt[3]{8} \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{0 + 2k\pi}{3}\right), \quad \text{con } k = 0, 1, 2$$

   por tanto, $w_0 = 2 \cdot \mathrm{cis}(0)$, $\quad w_1 = 2 \cdot \mathrm{cis}(\frac{2\pi}{3})$ $\quad$ y $\quad w_2 = 2 \cdot \mathrm{cis}(\frac{4\pi}{3})$, luego:

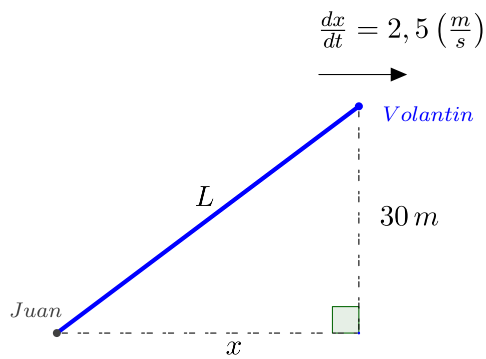
$$w_0 + w_1 + w_2 = 2 + 2(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) + 2(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 0$$

   ALTERNATIVA CORRECTA: **Letra C**

7. Juan juega con un volantín que está a 30 metros de altura, el viento aleja el volantín horizontalmente a razón de 2,5 metros por segundo. ¿Qué tan rápido debe soltar la cuerda Juan cuando el volantín está a 50 metros de él?

   (A) $2,5$ metros por segundo
   (B) $4$ metros por segundo
   (C) $10$ metros por segundo
   (D) $2$ metros por segundo
   (E) Ninguna de las anteriores

   **Desarrollo:**




   Usando Pitágoras Y posteriormente derivando, tenemos::

$$L^2 = x^2 + 900 \Rightarrow 2LL' = 2xx'$$

   Ahora, para $L = 50\,\text{m}$, se tendrá $x = 40\,\text{m}$, de dfonde se concluye que: $L' = \dfrac{x}{L} \cdot x' = \frac{40}{50} \cdot 2,5 = 2\left(\frac{m}{s}\right)$
   ALTERNATIVA CORRECTA: **Letra D**

**Problemas de Desarrollo:**

8. (***Este problema tiene asignado un máximo de 20 puntos***).
Resolver en $\mathbb{C}$, la ecuación:

$$x^4 - 10x^3 + 41x^2 - 76x + 52 = 0 \tag{1}$$

sabiendo que $x = 3 - 2i$ es una de sus raíces.

**Desarrollo:**

Sea $p(x) = x^4 - 10x^3 + 41x^2 - 76x + 52$, resolver la ecuación **(1)** en $\mathbb{C}$, equivale a encontrar las raíces de $p(x)$ en $\mathbb{C}$, por lo que factorizaremos el polinomio en los complejos, si $x_1 = 3 - 2i$ es una raíz de $p(x)$, el conjugado $x_2 = 3 + 2i$, también es una raiz de $p(x)$, por lo que $(x - x_1)(x - x_2)$ es un factor de $p(x)$.

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - (3 - 2i))(x - (3 + 2i)) = x^2 - 6x + 13$$

Ahora dividiendo $x^4 - 10x^3 + 41x^2 - 76x + 52$ por $x^2 - 6x + 13$, tenemos:

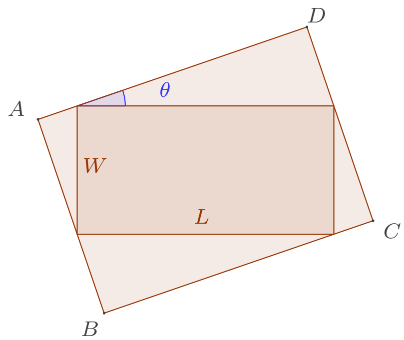
$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x + 4 \\
\hline
x^2 - 6x + 13 & x^4 - 10x^3 + 41x^2 - 76x + 52 \\
 & -x^4 + 6x^3 - 13x^2 \\
 & -4x^3 + 28x^2 - 76x \\
 & 4x^3 - 24x^2 + 52x \\
 & 4x^2 - 24x + 52 \\
 & -4x^2 + 24x - 52 \\
 & 0
\end{array}$$

Por tanto, el polinomio se puede factorizar:

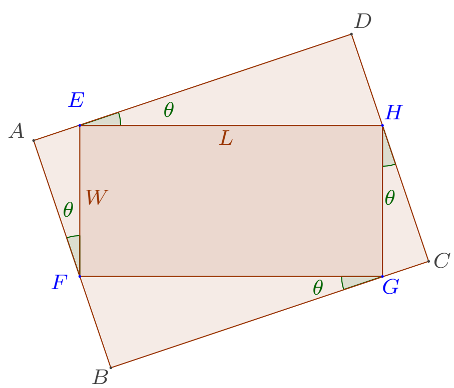
$$p(x) = (x^2 - 6x + 13)(x^2 - 4x + 4) = (x^2 - 6x + 13)(x - 2)^2$$

Por lo que las raíces del polinomio y por ende las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación **(1)**, son: $3 - 2i$, $3 + 2i$ y 2, esta última raiz de multiplicidad 2.

9. (***Este problema tiene asignado un máximo de 15 puntos***).
¿Cuál es el ángulo $\theta$ que genera el rectángulo $ABCD$ de máxima área que se puede circunscribir a otro rectángulo de base $L$ y altura $W$?




**Desarrollo:**
Rotulando vértices e identificando la posición de los ángulos iguales a $\theta$, tenemos la figura:




- $\left.\begin{array}{c} AE = W\text{sen}\theta \\ ED = L\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow AD = W\text{sen}\theta + \text{L}\cos\theta$
- $\left.\begin{array}{c} AF = W\cos\theta \\ FB = L\text{sen}\theta \end{array}\right\} \Rightarrow AB = W\cos\theta + L\text{sen}\theta$
- El área del rectángulo $ABCD$, es función de $\theta$ y viene dada por:
$$A(\theta) = (W\text{sen}\theta + \text{L}\cos\theta)(\text{W}\cos\theta + \text{Lsen}\theta)$$
- Derivando respectode $\theta$, tenemos:
$$\begin{aligned} A'(\theta) &= (W\cos\theta - L\text{sen}\theta)(\text{W}\cos\theta + \text{Lsen}\theta) + (\text{Wsen}\theta + \text{L}\cos\theta)(-\text{Wsen}\theta + \text{L}\cos\theta) \\ &= (W^2\cos^2\theta - L^2\text{sen}^2\theta) + (-\text{W}^2\text{sen}^2\theta + \text{L}^2\cos^2\theta) \\ &= W^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) + \text{L}^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) \\ &= W^2\cos 2\theta + L^2\text{sen}2\theta \\ &= (W^2 + L^2)\cos(2\theta) \end{aligned}$$

$A'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$, por otro lado, $A''(\theta) = -2(W^2 + L^2)\text{sen}(2\theta)$, luego, $A''(\dfrac{\pi}{4}) < 0$, por lo que en $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ tenemos un máximo.

10. (***Este problema tiene un máximo de 23 puntos.***)
Considere la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Determine: Dominio máximo, intercepto con los ejes coordenados, asíntotas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos locales, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y gráfica.
**Desarrollo:**

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
- La intersección con el eje de las ordenadas (Eje $y$) ocurre en $f(0) = 0$
- La intersección con el eje de las abscisas (Eje $x$) ocurre para aquellos $x \in \text{Dom}(f)$ para los que $f(x) = 0$, en este caso esto ocurre para $x = 0$
- Hay asíntota vertical en $x = 1$.
  - ◇ $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} \to \infty$
  - ◇ $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} \to \infty$
- Asíntotas Oblícuas:
  - ◇ $m = \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1$
  - ◇ $b = \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} (\frac{x^3}{(x-1)^2} - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{2x^2-x}{(x-1)^2} = 2$

  Los límites los podemos calcular por L'Hôpital,luego, $y = x + 2$ es asíntota oblícua tanto para $+\infty$,como para $-\infty$, luego, no hay asíntotas horizontales.
- Derivada de $f(x)$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 2(x-1)}{(x-1)^4} = \tfrac{x^2(x-1)(3(x-1)-2x)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

- Segunda derivada de $f(x)$

$$f''(x) = \tfrac{(3x^2-6x)(x-1)^3-(x^3-3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \tfrac{x(x-1)^2((3x-6)(x-1)-3(x^2-3x))}{(x-1)^6} = \tfrac{6x}{(x-1)^4}$$

- Puntos críticos:
  - ◇ La función no está definida en $x = 1$
  - ◇ $f'(x) = 0 \to x = 0, x = 3$
  - ◇ $f''(x) = 0 \to x = 0$
- Signos de la primera y segunda derivada:

| | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \| | $+$ | \| | $+$ | \| | $-$ | \| | $+$ | \| |
| $f''(x)$ | \| | $-$ | \| | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | \| |

- Intervalos de crecimiento: $(-\infty\,,\,1)$ y $[3\,,\,\infty)$
- Intervalos de decrecimiento: $(1\,,\,3]$
- Mínimo local en $x = 3$, el mínimo es $f(3) = \dfrac{27}{4}$

- Cóncava hacia arriba; $(0\,,\,1)$ y $(1\,,\,\infty)$
- Cóncava hacia abajo: $(-\infty\,,\,0)$
- Punto de inflexión en $x = 0$
- Gráfico: