

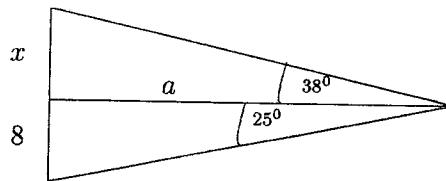
6 Trigonometría

Ejercicios resueltos

1. Desde el borde inferior de una ventana a 8 [m] sobre el nivel de la calle, se observa la casa del frente. Se ve la base de la casa con un ángulo de depresión de $25^{\circ} 15'$ y el techo de la casa con un ángulo de elevación de $38^{\circ} 23'$.

Calcule la altura de la casa del frente.

Respuesta:

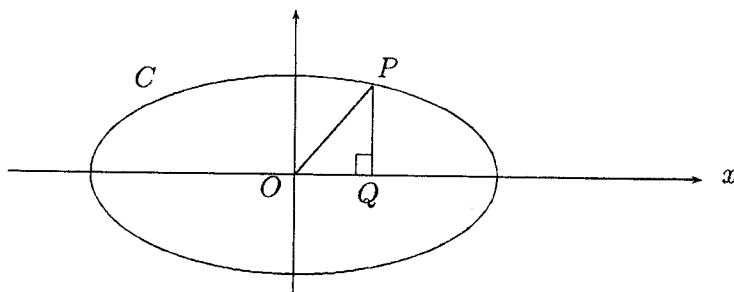


$$\tan 38^{\circ} 23' = \frac{x}{a} \quad \tan 25^{\circ} 15' = \frac{8}{a}$$

Luego $\frac{x}{\tan 38^{\circ} 23'} = \frac{8}{\tan 25^{\circ} 15'}$ de donde se obtiene que $x = 13.44$ [m] y en consecuencia $h = x + 8 = 21.44$ [m].

2. Las coordenadas de los puntos $P = (x, y)$ de la curva C de la fig. están dadas por: $x = \sqrt{3} \cos \alpha$ y el punto Q en el eje X es tal que $\overline{PQ} \perp OX$.

Encontrar las coordenadas del punto P en el primer cuadrante que determina el triángulo OPQ de área máxima.



Respuesta: $S = \frac{1}{2} \overline{OQ} \cdot \overline{PQ} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{2} \sin \alpha \cos \alpha$

Luego $S(\alpha) = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin(2\alpha)$.

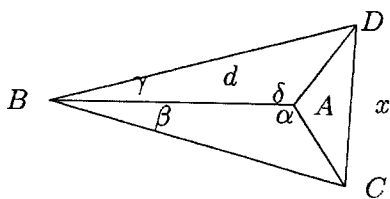
S máxima $\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Luego $P = \left(\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 1 \right)$.

3. Resolver la ecuación: $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$.

Solución: $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1$
 $\Leftrightarrow \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

4. En la fig. (plana) calcule $x = \overline{CD}$ en función de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, d = \overline{AB}$



Respuesta: En $\triangle ABD$: $\frac{d}{\sin[\pi - (\gamma + \delta)]} = \frac{\overline{AD}}{\sin \gamma}$

Luego $\overline{AD} = \frac{d \sin \gamma}{\sin(\gamma + \delta)}$

$$\text{En } \triangle ABC : \frac{d}{\text{sen}[\pi - (\alpha + \beta)]} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen } \beta}$$

$$\text{Luego } \overline{AC} = \frac{d \text{sen } \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$$

$$\text{En } \triangle ACD : x^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AD} \cdot \overline{AC} \cos[2\pi - (\alpha + \delta)].$$

Luego

$$x = \left[\left(\frac{d \text{sen } \gamma}{\text{sen}(\gamma + \delta)} \right)^2 + \left(\frac{d \text{sen } \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \right)^2 - 2 \frac{d^2 \text{sen } \beta \text{sen } \gamma \cos(\alpha + \delta)}{\text{sen}(\gamma + \delta) \text{sen}(\alpha + \beta)} \right]^{1/2}$$

5. Sea $f(x) = \sqrt{2}(\text{sen } 2x - \cos 2x)$.

Resolver la ecuación $f(x) = 2$, $x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

Solución: $f(x) = 2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x \right] = 2 \text{sen} \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \text{sen} \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Luego $S = \left\{ \frac{3\pi}{8}, \frac{11\pi}{8} \right\}$

6. Simplifique $A = (\cos^2 x + \tan^2 x - \text{sen}^2 x \tan^2 x)$

Respuesta:

$$\begin{aligned} A &= \tan^2 x (1 - \text{sen}^2 x) + \cos^2 x \\ &= \tan^2 x \cos^2 x + \cos^2 x = \cos^2 x (1 + \tan^2 x) \\ &= \cos^2 x \sec^2 x = 1 \end{aligned}$$

7. Para la senoide: $f(x) = \cos x \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \cos 2x$.

Calcule: amplitud, período y ángulo de fase.

Solución:

$$\begin{aligned}f(x) &= \cos x \sen x + \cos 2x \\&= \frac{1}{2} \sen 2x + \cos 2x \\&= \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \sen 2x + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2x \right) \\&= \frac{\sqrt{5}}{2} \sen(2x + \varphi),\end{aligned}$$

donde $\tan \varphi = 2$, luego $\varphi \approx 1.107$

Luego $A = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (amplitud) $T = \pi$ (período) $-\frac{\varphi}{2} = -0.5535$ es el ángulo de fase.

8. Demuestre la identidad:

$$\cotan 2x = \frac{\cos 7x + \cos 3x - \cos 5x - \cos x}{\sen 7x - \sen 3x - \sen 5x + \sen x}$$

Dem:

$$\begin{aligned}\cos 7x + \cos 3x &= 2 \cos 5x \cos 2x \\ \cos 5x + \cos x &= 2 \cos 3x \cos 2x \\ \sen 7x - \sen 3x &= 2 \cos 5x \sen 2x \\ \sen 5x - \sen x &= 2 \cos 3x \sen 2x\end{aligned}$$

Luego el cuociente del segundo miembro queda:

$$\frac{2 \cos 5x \cos 2x - 2 \cos 3x \cos 2x}{2 \cos 5x \sen 2x - 2 \cos 3x \sen 2x} = \frac{\cos 2x(\cos 5x - \cos 3x)}{\sen 2x(\cos 5x - \cos 3x)} = \cotan 2x$$

9. El propósito de este ejercicio es la resolución de una ecuación cúbica utilizando trigonometría.

- Resolver la ecuación $\cos 3y = \cos \pi/3$
- Expresa $\cos 3y$ en función de $x \div \cos y$
- Utilice lo anterior para reescribir la ecuación cúbica en $x : x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\cos \frac{\pi}{3} = 0$ como una ecuación trigonométrica en y . Finalmente resuelva para x esta ecuación cúbica.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos 3y = \cos \frac{\pi}{3} &\Leftrightarrow 3y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ &\text{ó } 3y = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k \text{ ó } y = \frac{5\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos 3y &= \cos(2y + y) = \cos 2y \cos y - \sin 2y \sin y \\ &= (2 \cos^2 y - 1) \cos y - 2 \sin^2 y \cos y \\ &= 2 \cos^3 y - \cos y - 2(1 - \cos^2 y) \cos y = 4 \cos^3 y - 3 \cos y. \\ \text{Luego } \cos 3y &= 4x^3 - 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \text{La ecuación cúbica queda: } \cos^3 y - \frac{3}{4} \cos y - \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{3} &= 0 \text{ o sea :} \\ 4 \cos^3 y - 3 \cos y - \cos \frac{\pi}{3} &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Como } x = \cos y \text{ entonces } \cos 3y - \cos \frac{\pi}{3} = 0.$$

$$\text{De lo anterior } y = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k, \quad y = \frac{5\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k.$$

$$\text{Si } k = 0 \text{ entonces } y = \frac{\pi}{9}, \quad y = \frac{5\pi}{9}$$

$$\text{Si } k = 1 \text{ entonces } y = \frac{7\pi}{9}.$$

Por lo tanto, $x = \cos \frac{\pi}{9}$, $x = \cos \frac{5\pi}{9}$, $x = \cos \frac{7\pi}{9}$ son las 3 soluciones de la ecuación cúbica.

10. Demuestre las identidades:

$$\sin x = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$$

Dem:

$$\frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{2 \sin(x/2)}{\cos(x/2) \sec^2(x/2)} = 2 \sin(x/2) \cos(x/2) = \sin x$$

$$\frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{\frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}}{\sec^2(x/2)} = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \cos x$$