3 Inecuaciones y Desigualdades

Ejercicios resueltos

1. Usando reducción al absurdo demuestre que:

$$a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$$

Dem: De acuerdo al ejercicio 4 anterior lo que hay que probar es que $a > 0 \wedge \frac{1}{a} < 0$ implica una contradicción.

Si $\frac{1}{a} < 0$ entonces $-\frac{1}{a} > 0$ y como $a > 0$ entonces $\left(-\frac{1}{a}\right) \cdot a > 0$ luego $-1 > 0$ lo que es una contradicción.

2. Resolver: $\sqrt[4]{2x+1} > \sqrt[4]{x-3}$.

Solución: En primer lugar debemos averiguar el conjunto de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la desigualdad tiene sentido (valores admisibles), como las raíces tienen índice par entonces: $2x+1 \geq 0 \ \wedge \ x-3 \geq 0$, es decir: $x \geq -\frac{1}{2} \ \wedge \ x \geq 3$. En consecuencia sólo tiene sentido la desigualdad para los $x \geq 3$.

Ahora bien como ambas expresione son positivas entonces la inecuación equivale a: $2x+1 > x-3$, es decir: $x > -4$.

En consecuencia el conjunto solución

$$S =]-4, +\infty[\cap [3, +\infty[= [3, +\infty[$$

3. Resolver la inecuación: $\dfrac{x^2}{x^2-1} \leq 1$

Respuesta: Un **error corriente** consiste en multiplicar miembro a miembro por x^2-1, con el objeto de "simplificar" el problema; sin embargo no sabemos aún el signo de x^2-1 y en consecuencia podríamos estar multiplicando por valores negativos, lo que invertiría la desigualdad.

El modo correcto de proceder es usar la definición de $a \leq b$ que sabemos significa que $b-a \geq 0$. Luego la inecuación equivale a:

$$1 - \frac{x^2}{x^2-1} \geq 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{-1}{x^2-1} \geq 0 \Leftrightarrow x^2-1 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Además la inecuación sólo carece de sentido para $x = 1$ y $x = -1$, en consecuencia $S =]-1, 1[$.

4. Resolver: $-2 + |x+2| \leq \sqrt{1 - |x-3|}$

   Solución: Los valores admisibles son:

   $$1 - |x-3| \geq 0 \ \Rightarrow \ |x-3| \leq 1 \ \Rightarrow \ -1 \leq x - 3 \leq 1 \ \Rightarrow \ 2 \leq x \leq 4$$

   Luego la expresión $x+2 > 0$ y la inecuación equivale a: $x \leq \sqrt{1 - |x-3|}$. Como $2 \leq x \leq 4$ entonces la inecuación equivale a: $x^2 \leq 1 - |x-3| \Leftrightarrow 1 - x^2 \geq |x-3|$.

   Observamos entonces que gracias al estudio inicial de los valores admisibles hemos simplificado bastante nuestro trabajo. Como $2 \leq x \leq 4$ entonces conviene estudiar ahora los siguientes casos:

   a) $2 \leq x \leq 3$ entonces la inecuación queda:

   $$1 - x^2 \geq 3 - x \ \Leftrightarrow \ x^2 - x + 2 \leq 0$$

   Como el discriminante de esta expresión cuadrática es negativo y el coeficiente principal es $+1$, entonces no hay soluciones.

   b) $3 \leq x \leq 4$ entonces la inecuación queda:

   $$1 - x^2 \geq x - 3 \ \Leftrightarrow \ x^2 + x - 4 \leq 0$$

   Es fácil ver que en principio las soluciones son

   $$x \in \left[\frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{17}\right), \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{17}\right)\right]$$

   pero como $3 > \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{17}\right)$ entonces no hay soluciones y en definitiva $S = \emptyset$.

6. Demostrar que: $|x-2| < 0.1 \Rightarrow |x^2-4| < 0.41$.

   Dem: $|x-2| < 0.1 \Leftrightarrow -0.1 < x-2 < 0.1$
   $\Leftrightarrow 1.9 < x < 2.1$.

   Por otra parte: $|x^2-4| = |x-2|\,|x+2| < 0.1|x+2|$.

   Como $|x+2| = x+2$ pues $1.9 < x < 2.1$ entonces $3.9 < |x+2| < 4.1$ entonces $|x^2-4| < 0.41$.

7. Determine un número $\delta > 0$ tal que:

   Si $|x-2| < \delta$ entonces $|3x-6| < 0.5$.

   Respuesta: $|3x-6| = 3|x-2| < 3\delta$

   $$3\delta = 0.5 \Rightarrow \ \delta = 0.16$$

8. Resolver: $\left|\dfrac{2x-3}{4x+1}\right| \leq 1$

   Respuesta: Como $|4x+1| > 0$ entonces la inecuación equivale a: $|2x-3| \leq |4x+1|$ que equivale a:

   $$-|4x+1| \leq 2x-3 \leq |4x+1|$$

   $$2x-3 \leq |4x+1| \Leftrightarrow 4x+1 \geq 2x-3 \ \vee \ 4x+1 \leq 3-2x$$

   $$\Leftrightarrow 2x \geq -4 \ \vee \ 6x \leq 2 \Leftrightarrow \ x \geq -2 \ \vee \ x \leq 1/3 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

   $$-|4x+1| \leq 2x-3 \Leftrightarrow |4x+1| \geq 3-2x \Leftrightarrow$$

   $$4x+1 \geq 3-2x \ \vee \ 4x+1 \leq 2x-3 \Leftrightarrow 6x \geq 2 \ \vee \ 2x \leq -4$$

   $$\Leftrightarrow \ x \geq 1/3 \ \vee \ x \leq -2$$

   Como $a \leq b \leq c$ significa $a \leq b \ \wedge \ b \leq c$ entonces

   $$\begin{aligned} S &= \mathbb{R} \cap (]-\infty,-2] \ \cup \ [1/3,+\infty[) \\ S &=]-\infty,-2] \cup [1/3,+\infty[\end{aligned}$$

9. Resolver el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x^2 - \frac{1}{4}x + 3 & > & 0 \\ x^2 - 4 & < & 0 \\ -2x + 3 & < & 0 \end{array}\right\}$$

Respuesta: El discriminante de la primera inecuación es negativo y el coeficiente principal es $+2$, luego la solución es $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcccl} x^2 - 4 < 0 & \Leftrightarrow & -2 & < & x & < & 2 \\ -2x + 3 < 0 & \Leftrightarrow & & & x & > & 3/2 \end{array}$$

Luego $S = \mathbb{R} \cap \,]-2, 2[\, \cap \,]\frac{3}{2}, +\infty[\, = \,]\frac{3}{2}, 2[$