UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
Departamento de Matemática
Desarrollo del Control 1 Matemática 021
Martes 10 de Abril del 2012

1. Sea $A = \{-2, -1, 0, 1\}$. Determine, justificadamente, el valor de verdad de:

   a) $\exists a \in A : a^2 - a + 1 < 7 \Rightarrow a$ es par

   b) $\exists a \in A, \forall b \in A : |a - b| \geq |b|$

   c) $\forall a \in A, \exists b \in A : a + b > b$

   Desarrollo Si $a = 0 : a^2 - a + 1 = 1 < 7$ es V y la proposición: 0 es par también es V . Así, $\exists a \in A(a = 0) : V \Rightarrow V$ es V. Luego $a)$ es verdadera.

   Para $b)$, basta tomar $a = 0 : |a - b| = |0 - b| = |-b| = |b| \geq |b|,\ \forall b \in A$. es V.

   La $c)$ es falsa ya que si tomamos $a = -2$ y b cualquier valor se tiene que $-2 + b < b$

2. Determinar los valores de $a \in (0, 1)$, de tal manera que el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{(x^2 - 2x + 2) \cdot (x - ax^2)}{\sqrt{|x| - 1}} \geq 0$$

   sea $(1, 5]$
   Desarrollo
   Restricciones: $|x| - 1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x > 1 \vee x < -1 \Leftrightarrow x \in A = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
   Tenemoa que $\sqrt{|x| - 1} > 0$, $\forall x \in A$, además, $x^2 - 2x + 2$, tiene coeficiente cuadrático positivo y $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$, luego, $x^2 - 2x + 2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, lo anterior nos permite escribir para cada $x \in A$:

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{(x^2 - 2x + 2) \cdot (x - ax^2)}{\sqrt{|x| - 1}} & \geq & 0 & / \cdot \sqrt{|x| - 1} \\ (x^2 - 2x + 2) \cdot (x - ax^2) & \geq & 0 & / \cdot (x^2 - 2x + 2) \\ x - ax^2 & \geq & 0 & \end{array}$$

   Si $a \in (0, 1) \Rightarrow 0 < a < 1 \Rightarrow 1 < \dfrac{1}{a}$, las raices de $x - ax^2 = 0$ son $x = 0$ y $x = \dfrac{1}{a}$ con coeficiente cuadrático negativo, luego la solución es:

$$S = \left[0, \frac{1}{a}\right] \cap A = \left(1, \frac{1}{a}\right]$$

   luego, para que la solución sea el intervalo $(1, 5]$ debe ocurrir que $a = \dfrac{1}{5}$