PAUTA CERTAMEN N°2 MAT021 - FORMA A

1. El conjunto solución de la ecuación:

$$\text{sen}(x) = 1 + \cos(x)$$

en el intervalo $[0, 2\pi]$, es:

- (A) $\{\frac{\pi}{2}\}$
- (B) $\{\frac{\pi}{2}, \pi\}$
- (C) $\{\pi\}$
- (D) $\{\frac{\pi}{2}, \pi, 3\pi\}$
- (E) Ninguna de las anteriores

Solución

$$\begin{aligned} \text{sen}(x) = 1 + \cos(x) &\Rightarrow \text{sen}(x) - \cos(x) = 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{sen}(x) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \vee x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \\ &\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \pi \end{aligned}$$

Respuesta: B.

2. Dado $f(x) = ax + b$ y $(f \circ f \circ f)(x) = 64x + 21$, entonces los valores de a y b son respectivamente:

- (A) $a = 4$; $b = 3$
- (B) $a = 4$; $b = 1$
- (C) $a = 3$; $b = 2$
- (D) $a = 4$; $b = 4$
- (E) $a = 2$; $b = 1$

Solución

$$\begin{aligned} f[f[f(x)]] &= 64x + 21 \\ f[f(ax + b)] &= 64x + 21 \\ f[a(ax + b) + b] &= 64x + 21 \\ a[a(ax + b) + b] + b &= 64x + 21 \\ a^3x + a^2b + ab + b &= 64x + 21 \end{aligned}$$

Luego: $a^3 = 64 \wedge a^2b + ab + b = 21$.

Por lo tanto, $a = 4$; $b = 1$

Respuesta: B.

3. La recta que pasa por el punto medio del trazo que une los puntos $(2, 0)$ y $(0, 4)$, y que es perpendicular a la recta $x + y + 1 = 0$, tiene por ecuación:

- (A) $y = x + 1$
 (B) $y = x$
 (C) $y = x + 3$
 (D) $y = x + 2$
 (E) $x + y = 3$

Solución

El punto medio es: $M = (\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}) = (1, 2)$, la recta $x + y + 1 = 0$ se puede escribir mediante, $y = -x - 1$, luego la recta buscada debe tener pendiente 1 para que se de la perpendicularidad solicitada, luego, la ecuación de la recta es: $y - 2 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x + 1$

Respuesta: A.

4. ¿Qué valor debe tener a para que el límite siguiente sea 3?

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x^4 - a^4}$$

- (A) $a = 1$
 (B) $a = 4$
 (C) $a = \frac{1}{4}$
 (D) $a = \frac{3}{4}$
 (E) Otro valor

Solución

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x^4 - a^4} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{(x - a)(x + a)(x^2 + a^2)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + ax + a^2}{(x + a)(x^2 + a^2)} = \frac{3a^2}{4a^3} \end{aligned}$$

Entonces $\frac{3a^2}{4a^3} = 3 \iff a = \frac{1}{4}$

Respuesta: C.

5. Sea $a > 0$ un número real. Se considera la parábola $y = ax^2$ y la circunferencia de radio 2 centrada en $(0, 2)$. ¿Para qué valores de a la circunferencia y la parábola se intersectan solo en el punto $(0, 0)$?

- (A) $\left(0, \frac{1}{8}\right]$
 (B) $\left(0, \frac{1}{4}\right]$
 (C) $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$
 (D) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$
 (E) Ninguna de las anteriores

Solución

- Obtenemos la ecuación de la circunferencia: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$
- Reemplazamos $y = ax^2$, en la ecuación de la circunferencia.
- Obtenemos la ecuación: $x^2(a^2x^2 + 1 - 4a) = 0$
- Buscamos soluciones con $x \neq 0$ y encontramos $x^2 = \frac{4a-1}{a^2}$
- Esta ecuación no tendrá solución si $a \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$.

Respuesta: B.

6. Los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, de tal manera que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{2x - \operatorname{sen}(x)} & , \quad x < 0 \\ b & , \quad x = 0 \\ \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} + a & , \quad x > 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$, son:

- (A) $a = \frac{7}{4}$; $b = 1$
 (B) $a = \frac{3}{4}$; $b = 2$
 (C) $a = \frac{3}{4}$; $b = 1$
 (D) $a = \frac{7}{4}$; $b = 2$
 (E) Ninguna de las anteriores

Solución

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{2x - \operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}{2 - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}} = \frac{1 + 1}{2 - 1} = 2$

- $$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} + a = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} + a =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} + a = \frac{1}{4} + a,$$

- como para que exista el límite debe ocurrir que los límites laterales han de ser iguales, entonces, $a = \frac{7}{4}$
  - Por otro lado:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow 2 = b$$

Respuesta: D

7. En relación a la hipérbola:

$$x^2 - y^2 = 2x$$

¿Cuál(es) de las afirmaciones siguientes es(son) verdadera(s)?

- (I) El centro de la hipérbola se ubica en el punto $(-1, 0)$.
- (II) Las asíntotas de esta hipérbola son perpendiculares.
- (III) La hipérbola corta al eje de las abscisas (Eje x) en los puntos $x = 0$ y $x = 2$.

- (A) Sólo I
- (B) Sólo II
- (C) Sólo III
- (D) Sólo II y III
- (E) Todas I, II y III

Solución $x^2 - y^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - y^2 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 - 1 - y^2 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 - y^2 = 1$

- (I) El centro es $(1, 0)$, luego la afirmación (I) es falsa.
- (II) $(x - 1)^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x - 1 - y)(x - 1 + y) = 0 \Rightarrow x - 1 - y = 0 \vee x - 1 + y = 0$
 $\Rightarrow y = x - 1 \vee y = -x + 1$, el producto de sus pendientes es -1 , luego, son perpendiculares, lo que dice que (II) es verdadera.
- (III) Corta al eje x cuando $y = 0$, entonces, esto ocurre cuando $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$, luego (III) es verdadera.

Respuesta: D

8. Indique el valor de $C > 0$ de modo que la función $f(x) = \frac{\sqrt{Cx^4 + 1} + 2x}{4x^2 + 3x + 1}$ tenga como asíntota horizontal a la recta $y = 1$ cuando x tiende a infinito.

- (A) $C = \sqrt{2}$
- (B) $C = 0$
- (C) $C = \frac{1}{4}$
- (D) $C = 16$
- (E) No existe un C que cumpla lo solicitado.

Solución

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{cx^4+1}+2x) \frac{1}{x^2}}{(4x^2+3x+1) \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{c+\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x}}}{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{C}}{4} = 1 \Rightarrow C = 16$$

Respuesta: D.

9. Hallar e identificar el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $(0, -2)$ es el doble de su distancia al punto $(0, 1)$

Solución

Sea (x, y) un punto del plano cartesiano, tal que

$$d((x, y), (0, -2)) = 2d((x, y), (0, 1))$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + (y + 2)^2} &= 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \\ x^2 + y^2 + 4x + 4 &= 4(x^2 + y^2 - 2y + 1) \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 &= 4x^2 - 8y + 4 + 4y^2 \\ 3x^2 - 12y + 3y^2 &= 0 \\ 3x^2 + 3(y^2 - 4y + 4) &= 12 \\ x^2 + (y - 2)^2 &= 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, el lugar geométrico corresponde a una circunferencia de centro $C(0, 2)$ y radio $r = 2$.

10. Considere la función f definida en $\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x \leq 0 \\ b - (x - a)^2 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \geq 0$.

- a) Determine qué relación debe existir entre a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.
- b) Determine los valores de a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$ y biyectiva.
- c) Para los valores determinados en la parte b), encuentre f^{-1} , la función inversa de f .

Solución

a) Las funciones lineales son continuas en todo $\mathbb{R}$ al igual que las funciones cuadráticas, por tanto, la función f es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Ahora para la continuidad en $x = 0$, debemos asegurar la existencia del límite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, para ello, los límites laterales:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (b - (x - a)^2) = b - a^2$

deben ser iguales, es decir, $b - a^2 = 0$. En este caso, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, por lo que aseguramos la continuidad en todo $\mathbb{R}$

b) Al tomar $f(x)$ todos los valores mayores o iguales a cero para $x \leq 0$, debe cumplirse para garantizar la inyectividad de la función que el vértice de la parte parabólica $V = (a, b)$ cumpla $a \leq 0$, por otro lado, $a \geq 0$, luego $a = 0$ y para mantener la continuidad $b = a^2 = 0$, de esta manera, la función está definida en $\mathbb{R}$ y su recorrido es $\mathbb{R}$, por tanto, f es biyectiva y continua en todo $\mathbb{R}$.

c) La función queda entonces expresada por :

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x \leq 0 \\ -x^2 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

y su inversa mediante:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & , \quad x \leq 0 \\ -x & , \quad x > 0 \end{cases} .$$